MA1301 Uke 1: 1.2, 2.2 og 2.3

Magnus Bakke Botnan

24. august 2012

Please don't shoot the pianist. He is doing his best.

- Oscar Wilde.

Binomialkoeffisienten

Definisjon: fakultet

For et heltall $n \geq 0$ definerer vi

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdots 1 & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Binomialkoeffisienten

Definisjon: fakultet

For et heltall $n \geq 0$ definerer vi

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdots 1 & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Eksempel

$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Binomialkoeffisienten

Definisjon: fakultet

For et heltall $n \geq 0$ definerer vi

$$n! = \begin{cases} n \cdot (n-1) \cdots 1 & n \geq 1 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Eksempel

$0! = 1, 1! = 1, 2! = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Definisjon: binomialkoeffisienten

For et hvert positivt heltall n og et hvert heltall k slik at $0 \leq k \leq n$ definerer vi *binomialkoeffisienten*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffisienten

Eksempel (s.8)

For $n = 8$ og $k = 3$ får vi

$$\frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdots 1}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdots 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 = 56$$

Binomialkoeffisienten

Eksempel (s.8)

For $n = 8$ og $k = 3$ får vi

$$\frac{8!}{3!(8-3)!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdots 1}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdots 1} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} = 8 \cdot 7 = 56$$

Pascals regel (s.8)

For $1 \leq k \leq n$ så gjelder

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Pascals trekant

Pascals trekant

$n = 1$: $\binom{1}{0}$ $\binom{1}{1}$

$n = 2$: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$n = 3$: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$n = 4$: $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

Pascals trekant

Pascals trekant

$n = 1$: 1 1

$n = 2$: $\binom{2}{0}$ $\binom{2}{1}$ $\binom{2}{2}$

$n = 3$: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$n = 4$: $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

Pascals trekant

Pascals trekant

$n = 1$: 1 1

$n = 2$: 1 1+1 1

$n = 3$: $\binom{3}{0}$ $\binom{3}{1}$ $\binom{3}{2}$ $\binom{3}{3}$

$n = 4$: $\binom{4}{0}$ $\binom{4}{1}$ $\binom{4}{2}$ $\binom{4}{3}$ $\binom{4}{4}$

Pascals trekant

Pascals trekant

$n=1$:				1		1				
$n=2$:			1		2		1			
$n=3$:		$\binom{3}{0}$		$\binom{3}{1}$		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		
$n=4$:	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$	

Pascals trekant

Pascals trekant

$n=1$:				1		1				
$n=2$:			1		2		1			
$n=3$:		1		1+2		$\binom{3}{2}$		$\binom{3}{3}$		
$n=4$:	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$	

Pascals trekant

Pascals trekant

$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		2+1		1	
$n = 4$:	$\binom{4}{0}$		$\binom{4}{1}$		$\binom{4}{2}$		$\binom{4}{3}$		$\binom{4}{4}$

Pascals trekant

Pascals trekant

$n=1$:				1		1			
$n=2$:			1		2		1		
$n=3$:		1		3		3		1	
$n=4$:	1		4		6		4		1

Pascals trekant

Pascals trekant

$n = 1$:				1		1			
$n = 2$:			1		2		1		
$n = 3$:		1		3		3		1	
$n = 4$:	1		4		6		4		1

Binomialkoeffisienten (s.9)

Det følger fra Pascals regel at $\binom{n}{k}$ er heltall for $n \geq 0$ og $0 \leq k \leq n$.

Binomialteoremet

Eksempel (s.9)

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

Binomialteoremet

Eksempel (s.9)

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

Binomialteoremet

Eksempel (s.9)

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3$$

Binomialteoremet

Eksempel (s.9)

$$(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3$$

Binomialteoremet

For $a, b \in \mathbb{R}$ og $n \geq 1$ så er

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Binomialteoremet

Eksempel

$2^n =$

Binomialteoremet

Eksempel

$2^n = (1+1)^n =$

Binomialteoremet

Eksempel

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}1 + \dots \binom{n}{n}1^n =$$

Binomialteoremet

Eksempel

$$2^n = (1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}1 + \dots \binom{n}{n}1^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}.$$

Divisjonsalgoritmen

Teorem 2.1 (s.17)

La $a, b \in \mathbb{Z}$ med $b > 0$, da eksisterer det unike $q, r \in \mathbb{Z}$ slik at

$$a = qb + r, \qquad 0 \leq r < b$$

Divisjonsalgoritmen

Teorem 2.1 (s.17)

La $a, b \in \mathbb{Z}$ med $b > 0$, da eksisterer det unike $q, r \in \mathbb{Z}$ slik at

$$a = qb + r, \qquad 0 \leq r < b$$

Eksempel

La $a = 5$ og $b = 3$ da er $q = 1$ og $r = 2$: $5 = 1 \cdot 3 + 2$

Divisjonsalgoritmen

Teorem 2.1 (s.17)

La $a, b \in \mathbb{Z}$ med $b > 0$, da eksisterer det unike $q, r \in \mathbb{Z}$ slik at

$$a = qb + r, \qquad 0 \leq r < b$$

Eksempel

La $a = 5$ og $b = 3$ da er $q = 1$ og $r = 2$: $5 = 1 \cdot 3 + 2$

Korollar (2.18)

La $a, b \in \mathbb{Z}$ med $b \neq 0$, da eksisterer det unike $q, r \in \mathbb{Z}$ slik at

$$a = qb + r, \qquad 0 \leq r < |b|$$

Divisjonsalgoritmen

Merk

La $b = 2$ da eksisterer det for hver $a \in \mathbb{Z}$ unike q og r, $0 \leq r \leq 1$, slik at $a = 2q + r$.

Divisjonsalgoritmen

Merk

La $b = 2$ da eksisterer det for hver $a \in \mathbb{Z}$ unike q og r, $0 \leq r \leq 1$, slik at $a = 2q + r$.

Partall/Oddetall

Et heltall $a \in \mathbb{Z}$ er et *partall* hvis $r = 0$ og et *oddetall* hvis $r = 1$.

Divisjonsalgoritmen

Merk

La $b = 2$ da eksisterer det for hver $a \in \mathbb{Z}$ unike q og r, $0 \leq r \leq 1$, slik at $a = 2q + r$.

Partall/Oddetall

Et heltall $a \in \mathbb{Z}$ er et *partall* hvis $r = 0$ og et *oddetall* hvis $r = 1$.

Eksempel

- Alle oddetall kvadrert er på formen $8k + 1$:

Divisjonsalgoritmen

Merk

La $b = 2$ da eksisterer det for hver $a \in \mathbb{Z}$ unike q og r, $0 \leq r \leq 1$, slik at $a = 2q + r$.

Partall/Oddetall

Et heltall $a \in \mathbb{Z}$ er et *partall* hvis $r = 0$ og et *oddetall* hvis $r = 1$.

Eksempel

- Alle oddetall kvadrert er på formen $8k + 1$:
- Oddetall er på formen $4m + 1$ eller $4m + 3$ $(4m = 2(2m) + 0, 4m + 2 = 2(2m + 1) + 0)$)

Divisjonsalgoritmen

Merk

La $b = 2$ da eksisterer det for hver $a \in \mathbb{Z}$ unike q og r, $0 \leq r \leq 1$, slik at $a = 2q + r$.

Partall/Oddetall

Et heltall $a \in \mathbb{Z}$ er et *partall* hvis $r = 0$ og et *oddetall* hvis $r = 1$.

Eksempel

- Alle oddetall kvadrert er på formen $8k + 1$:
- Oddetall er på formen $4m + 1$ eller $4m + 3$
  ($4m = 2(2m) + 0, 4m + 2 = 2(2m + 1) + 0$)
  $(4m + 1)^2 = 16m^2 + 8m + 1 = 8(2m^2 + m) + 1$

Divisjonsalgoritmen

Merk

La $b = 2$ da eksisterer det for hver $a \in \mathbb{Z}$ unike q og r, $0 \leq r \leq 1$, slik at $a = 2q + r$.

Partall/Oddetall

Et heltall $a \in \mathbb{Z}$ er et *partall* hvis $r = 0$ og et *oddetall* hvis $r = 1$.

Eksempel

- Alle oddetall kvadrert er på formen $8k + 1$:
- Oddetall er på formen $4m + 1$ eller $4m + 3$
  $(4m = 2(2m) + 0, 4m + 2 = 2(2m + 1) + 0))$
  $(4m + 1)^2 = 16m^2 + 8m + 1 = 8(2m^2 + m) + 1$
  $(4m + 3)^2 = 16m^2 + 24m + 9 = 8(2m^2 + 3m + 1) + 1$

Divisjonsalgoritmen

Eksempel 2.1 (s.18)

- $\dfrac{a(a^2+2)}{3}$ er et heltall for alle $a \geq 1$.

Divisjonsalgoritmen

Eksempel 2.1 (s.18)

- $\dfrac{a(a^2+2)}{3}$ er et heltall for alle $a \geq 1$.

1. $\dfrac{3q\left((3q)^2+2\right)}{3} = q(9q^2+2)$

Divisjonsalgoritmen

Eksempel 2.1 (s.18)

- $\dfrac{a(a^2+2)}{3}$ er et heltall for alle $a \geq 1$.

1. $$\frac{3q\left((3q)^2+2\right)}{3} = q(9q^2+2)$$
2. $$\frac{(3q+1)\left((3q+1)^2+2\right)}{3} = (3q+1)(3q^2+2q+1)$$

Divisjonsalgoritmen

Eksempel 2.1 (s.18)

- $\dfrac{a(a^2+2)}{3}$ er et heltall for alle $a \geq 1$.

1. $\dfrac{3q\left((3q)^2+2\right)}{3} = q(9q^2+2)$
2. $\dfrac{(3q+1)\left((3q+1)^2+2\right)}{3} = (3q+1)(3q^2+2q+1)$
3. $\dfrac{(3q+2)\left((3q+2)^2+2\right)}{3} = (3q+2)(3q^2+4q+2)$.

Største felles divisor

Definisjon 2.1 (s.20)

Et heltall b er *delelig på* et heltall a hvis det eksisterer et heltall c slik at $b = ac$. Vi skriver dette som $a|b$ eller $a \nmid b$ hvis b *ikke* er delelig på a.

Største felles divisor

Definisjon 2.1 (s.20)

Et heltall b er *delelig på* et heltall a hvis det eksisterer et heltall c slik at $b = ac$. Vi skriver dette som $a|b$ eller $a \nmid b$ hvis b *ikke* er delelig på a.

Eksempel

$$4|12: \;\; 12 = 3 \cdot 4$$

Største felles divisor

Definisjon 2.1 (s.20)

Et heltall b er *delelig på* et heltall a hvis det eksisterer et heltall c slik at $b = ac$. Vi skriver dette som $a|b$ eller $a \nmid b$ hvis b *ikke* er delelig på a.

Eksempel

$$4|12: \;\; 12 = 3 \cdot 4$$

$$5 \nmid 12: \;\; 12 = 5 \cdot 2 + 2$$

Største felles divisor

Teorem 2.2 (s.20)

For $a, b, c \in \mathbb{Z}$ så gjelder:

1. $a|0, 1|a, a|a$
2. $a|1$ hvis og bare hvis $a = \pm 1$
3. Hvis $a|b$ og $c|d$, da $ac|bd$
4. Hvis $a|b$ og $b|c$, da $a|c$
5. $a|b$ og $b|a$ hvis og bare hvis $a = \pm b$
6. Hvis $a|b$ og $b \neq 0$, da er $|a| \leq |b|$
7. Hvis $a|b$ og $a|c$, da $a|(bx + cy)$ for vilkåerlige $x, y \in \mathbb{Z}$

Største felles divisor

Definisjon 2.2 (største felles divisor) (s. 21)

La $a, b \in \mathbb{Z}$. Da er *største felles divisor av* a og b, $\gcd(a, b)$ det positive heltallet d som tilfredstiller

1. $d|a$ og $d|b$
2. Hvis $c|a$ og $c|b$ så er $c \leq d$.

Største felles divisor

Definisjon 2.2 (største felles divisor) (s. 21)

La $a, b \in \mathbb{Z}$. Da er *største felles divisor av* a og b, $\gcd(a, b)$ det positive heltallet d som tilfredstiller

1. $d|a$ og $d|b$
2. Hvis $c|a$ og $c|b$ så er $c \leq d$.

Eksempel 2.2 (s. 21)

De positive divisorene av -12 er $1, 2, 3, 4, 6, 12$ og de positive divisorene av 30 er $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. Derfor er $\gcd(-12, 30) = 6$.

Største felles divisor

Definisjon 2.2 (største felles divisor) (s. 21)

La $a, b \in \mathbb{Z}$. Da er *største felles divisor av* a og b, $\gcd(a, b)$ det positive heltallet d som tilfredstiller

1. $d|a$ og $d|b$
2. Hvis $c|a$ og $c|b$ så er $c \leq d$.

Eksempel 2.2 (s. 21)

De positive divisorene av -12 er $1, 2, 3, 4, 6, 12$ og de positive divisorene av 30 er $1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30$. Derfor er $\gcd(-12, 30) = 6$.

Teorem 2.3 (s.21)

For $a, b \in \mathbb{Z}$ med $a \neq 0$ eller $b \neq 0$ så eksisterer det $x, y \in \mathbb{Z}$ slik at $\gcd(a, b) = ax + by$.

Største felles divisor

Definisjon 2.3 (s.22)

Vi sier at $a, b \in \mathbb{Z}$ er *relativt primiske* eller *koprimiske* hvis $\gcd(a, b) = 1$.

Største felles divisor

Definisjon 2.3 (s.22)

Vi sier at $a, b \in \mathbb{Z}$ er *relativt primiske* eller *koprimiske* hvis $\gcd(a, b) = 1$.

Teorem 2.4 (s.23)

La $a, b \in \mathbb{Z}$ med $a \neq 0$ eller $b \neq 0$. Da er $\gcd(a, b) = 1$ hvis og bare hvis det eksisterer $x, y \in \mathbb{Z}$ slik at $1 = ax + by$.

Største felles divisor

Definisjon 2.3 (s.22)

Vi sier at $a, b \in \mathbb{Z}$ er *relativt primiske* eller *koprimiske* hvis $\gcd(a, b) = 1$.

Teorem 2.4 (s.23)

La $a, b \in \mathbb{Z}$ med $a \neq 0$ eller $b \neq 0$. Da er $\gcd(a, b) = 1$ hvis og bare hvis det eksisterer $x, y \in \mathbb{Z}$ slik at $1 = ax + by$.

Korollar 1 (s.23)

Hvis $\gcd(a, b) = d$, da er $\gcd(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$.