MA1301 TALLTEORI, HØST 2013
LØSNINGSFORSLAG – ØVING 2

Avsnitt 2.4

Oppgave 2a. Vi finner at $\gcd(56, 72) = 8$ med Euklids algoritme:

$$\begin{aligned} 72 &= 1 \cdot 56 + 16 \\ 56 &= 3 \cdot 16 + 8 \\ 16 &= 2 \cdot \underline{8} + 0 \end{aligned}$$

Ved å ta utgangspunkt i nest siste linje og gå bakover, får vi

$$8 = 56 - 3 \cdot 16 = 56 - 3(72 - 56) = 4 \cdot 56 - 3 \cdot 72,$$

og dermed løser $x = 4$ og $y = -3$ ligninga $56x + 72y = \gcd(56, 72)$.

Oppgave 2d. Euklids algoritme gir $\gcd(1769, 2378) = 29$:

$$\begin{aligned} 2378 &= 1 \cdot 1769 + 609 \\ 1769 &= 2 \cdot 609 + 551 \\ 609 &= 1 \cdot 551 + 58 \\ 551 &= 9 \cdot 58 + 29 \\ 58 &= 2 \cdot \underline{29} + 0 \end{aligned}$$

Ved å gå baklengs får vi lineærkombinasjoenen vi søker:

$$\begin{aligned} 29 &= 551 - 9 \cdot 58 = 551 - 9(609 - 551) = 10 \cdot 551 - 9 \cdot 609 \\ &= 10(1769 - 2 \cdot 609) - 9 \cdot 609 = 10 \cdot 1769 - 29 \cdot 609 \\ &= 10 \cdot 1769 - 29(2378 - 1769) = 39 \cdot 1769 - 29 \cdot 2378 \end{aligned}$$

Dvs. $1769x + 2378y = \gcd(1769, 2378)$ løses av $x = 39$, $y = -29$.

Oppgave 4a. Anta $\gcd(a, b) = 1$. Vi viser at $\gcd(a + b, a - b) \leq 2$, altså at største felles divisor er enten 1 eller 2.

La $d = \gcd(a+b, a-b)$, så $d \mid (a+b)$ og $d \mid (a-b)$. Det følger at $d \mid 2a$ og $d \mid 2b$, siden $2a = (a+b)+(a-b)$ og $2b = (a + b) - (a - b)$. Ved definisjon av gcd har vi da at

$$d \leq \gcd(2a, 2b) = 2 \gcd(a, b) = 2,$$

hvor første likhet følger fra Teorem 2.7.

Oppgave 5a. Husk at $\gcd(a, b) = 1$ hvis og bare hvis det finnes tall x, y slik at $ax + by = 1$. Anta dette er tilfelle.

La oss bevise hintet i oppgaven først: Hvis $\gcd(a, b) = 1 = \gcd(a, c)$, da er $\gcd(a, bc) = 1$. For å se dette, velg $ax + by = 1 = az + cw$. Da har vi $1 = (ax + by)(az + cw) = a(axz + cxw + byz) + bc(yw)$. Vi har altså skrevet 1 som en lineærkombinasjon av a og bc, så det følger at $\gcd(a, bc) = 1$.

På samme måte følger det at hvis $\gcd(a, b) = 1 = \gcd(c, b)$, så er $\gcd(ac, b) = 1$. Nå kan vi bruke dette induktivt. Først sett $b = c$ i første tilfelle. Da får vi at $\gcd(a, b^n) = 1$. Deretter får vi, med $a = c$ i andre tilfelle, at $\gcd(a^n, b^n) = 1$.

Dette kan også vises direkte ved å se på $1 = (ax + by)^{2n}$ og benytte binomialteoremet.

Date: 26. september 2013.

Oppgave 5b. Vi skal vise at hvis $a^n \mid b^n$, så er $a \mid b$.

Merk først vi kan anta at a er positiv, siden $\mid$ er blind for fortegn. Merk at hvis c er positiv så er $c \mid d$ hvis og bare hvis $\gcd(c,d) = c$ (fordi c er den største divisoren til c). Med andre ord er $\gcd(a^n, b^n) = a^n$, og vi vil vise at $d := \gcd(a,b) = a$.

Skriv $a = dr$ og $b = ds$, slik at $\gcd(r,s) = 1$. Ved del (a) er da $\gcd(r^n, s^n) = 1$, så det finnes heltall x og y slik at $r^n x + s^n y = 1$. Multiplikasjon med d^n gir da at

$$a^n x + b^n y = d^n r^n x + d^n s^n y = d^n,$$

sånn at $a^n = \gcd(a^n, b^n) \mid d^n$. Men nå har vi også at $d \mid a$, så $d^n \mid a^n$. Med andre ord har vi $a^n = d^n$, så $a = d$. Dette viser at $\gcd(a,b) = a$, eller ekvivalent, at $a \mid b$.

Avsnitt 2.5

Oppgave 1. Vi skal avgjøre hvilke diofantiske ligninger som ikke kan løses. Kriteriet vårt sier at dette er tilfelle akkurat når $\gcd(a,b) \nmid c$. (Her er ligninga $ax + by = c$.) Dermed er oppgaven redusert til å sjekke gcd-er.

Vi har $\gcd(6,51) = 3 \nmid 22$, $\gcd(33,14) = 1 \mid 115$ og $\gcd(14,35) = 7 \nmid 93$. Dermed konkluderer vi at ligning (a) og ligning (c) ikke kan løses.

Oppgave 2b. Vi skal løse ligninga $24x + 138y = 18$. Først finner vi $d = \gcd(24,138) = 6$ med Euklids algoritme. Siden $6 \mid 18$ kan vi løse ligninga.

$$\begin{aligned} 138 &= 5 \cdot 24 + 18 \\ 24 &= 1 \cdot 18 + 6 \\ 18 &= 3 \cdot \underline{6} + 0 \end{aligned}$$

Nå gir tilbakesubstitusjon $6 = 6 \cdot 24 - 138$, så $18 = 18 \cdot 24 - 3 \cdot 138$. Dermed er $x_0 = 18, y_0 = -3$ en spesiell løsning av ligninga. Nå bruker vi teoremet som gir oss alle løsninger:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + b/d \cdot t = 18 + 138/6 \cdot t = 18 + 23t \\ y &= y_0 - a/d \cdot t = -3 - 24/6 \cdot t = -3 - 4t, \end{aligned}$$

hvor t er et heltall.

Oppgave 3d. Vi skal løse $158x - 57y = 7$ for alle *positive* heltall. Vi løser ligninga på vanlig måte.

$$\begin{aligned} 158 &= 2 \cdot 57 + 44 \\ 57 &= 1 \cdot 44 + 13 \\ 44 &= 3 \cdot 13 + 5 \\ 13 &= 2 \cdot 5 + 3 \\ 5 &= 1 \cdot 3 + 2 \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot \underline{1} + 0 \end{aligned}$$

Tilbakesubstitusjon gir $1 = 61 \cdot 57 - 22 \cdot 158$, som igjen gir $7 = 427 \cdot 57 - 154 \cdot 158$, så en spesiell løsning er $y_0 = -427, x_0 = -154$. Alle heltallsløsninger er da gitt ved

$$\begin{aligned} x &= -154 - 57t \\ y &= -427 - 158t. \end{aligned}$$

Nå er vi kun interessert i de løsningene hvor både $x > 0$ og $y > 0$. $-154 - 57t > 0$ gir at $t < -2$, og $427 - 158t > 0$ gir også $t < -2$. Dermed er alle positive heltallsløsninger gitt som over med $t < -2$.

Oppgave 6. La x beskrive antall kalver, y antall lam og z antall grisunger. Opplysningene i oppgaven gir da to ligninger, nemlig $x + y + z = 100$ og $120x + 50y + 25z = 4000$. Vi skal finne positive heltallsløsninger av denne. Vi har $z = 100 - x - y$, og dette lar oss eliminere z-variabelen ved innsetting. Vi får ligninga $95x + 25y = 1500$.

Nå er $\gcd(95,25) = 5$ og $5 = -1 \cdot 95 + 4 \cdot 25$. Når vi multipliserer dette uttrykket med 300 får vi $-300 \cdot 95 + 1200 \cdot 25 = 1500$, som gir den spesielle løsninga $x_0 = -300, y_0 = 1200$. Alle heltallige løsninger er dermed på form

$$\begin{aligned} x &= -300 + 25/5 \cdot t = -300 + 5t \\ y &= 1200 - 95/5 \cdot t = 1200 - 19t. \end{aligned}$$

Nå krever vi at $x, y > 0$ hvilket gir begrensningene $t > 60$ og $t < 64$. Ved å sette inn verdiene 61, 62 og 63 for t, får vi de mulige løsningene

$$x = 5, y = 41; \quad x = 10, y = 22; \quad x = 15; y = 3,$$

som til slutt gir $z = 100 - x - y$ lik 54, 68 og 82.

Eksamen høst 2004

Oppgave 1. Oppgaveteksten gir opphav til følgende ligninger: $0a + 70p + 30s = 5060$ og $a + p + s = 118$. Vi har i tillegg følgende betingelser: $s - 10 \geq p \geq 0$ og $a \geq 10$.

Vi løser først ligninga $70p + 30s = 5060$ i hele tall. $\gcd(70, 30) = 10$, og $10 = 1 \cdot 70 - 2 \cdot 30$, så $5060 = 506 \cdot 70 - 1012 \cdot 30$. Vi har dermed en spesiell løsning, og vi får alle heltallige løsninger som vanlig:

$$\begin{aligned} p &= 506 - 30/10 \cdot t = 506 - 3t \\ s &= -1012 + 70/10 \cdot t = -1012 + 7t \end{aligned}$$

Fra betingelsen $s - 10 \geq p \geq 0$ får vi at $t \geq 153$ og $t \leq 168$.

Nå har vi enda ikke brukt noen av informasjonen vi har om administrasjonen, nemlig at $a+p+s = 118$ og $a \geq 10$. Kombinerer vi dette får vi

$$10 \leq a = 118 - p - s = 118 - (506 - 3t) - (-1012 + 7t),$$

som gir $t \leq 153$.

Altså er $t = 153$, som gir $p = 506 - 3 \cdot 153 = 47$, $s = -1012 + 7 \cdot 153 = 59$ og $a = 118 - p - s = 118 - 47 - 59 = 12$.

Eksamen høst 2005

Oppgave 1. Del (a) går som før. Vi finner

$$\begin{aligned} 788 &= 6 \cdot 116 + 92 \\ 116 &= 1 \cdot 92 + 24 \\ 92 &= 3 \cdot 24 + 20 \\ 24 &= 1 \cdot 20 + 4 \\ 20 &= 5 \cdot \underline{4} + 0 \end{aligned}$$

så $\gcd(788, 116) = 4$. En spesiell løsning finner vi som vanlig ved tilbakesubstitusjon

$$4 = 24 - 20 = 4 \cdot 24 - 92 = 4 \cdot 116 - 5 \cdot 92 = 34 \cdot 116 - 5 \cdot 788,$$

altså løser $x_0 = -5$ og $y_0 = 34$ ligninga $788x + 116y = \gcd(788, 116)$. Vi får da alle løsninger

$$\begin{aligned} x &= -5 + 116/4 \cdot t = -5 + 29t \\ y &= 34 - 788/4 \cdot t = 34 - 197t, \end{aligned}$$

når t varierer over de hele tall.

For å løse del (b), merker vi oss at ligninga fra del (a) nesten beskriver problemet. Ligninga for del (b) ser ut som følger:

$$-788x + 116y = 24$$

Siden $\gcd(788, 116) = 4$ og $4 \mid 24$ har denne ligninga løsninger. Vi bruker løsningene vi fant i del (a), men må multiplisere de spesielle løsningene med $6 = 24/4$, og introdusere motsatt fortegn på x. Vi får altså løsningene

$$\begin{aligned} x &= 30 - 29t \\ y &= 204 - 197t, \end{aligned}$$

hvor $t \in \mathbb{Z}$. Antikvaren kan kun selge (kjøpe) et ikke-negativt antall bøker, så $x, y \geq 0$. Vi ser altså at det minste antallet kjøpte og solgte bøker inntreffer når $t = 1$. Da har hun kjøpt 1 bok, og solgt 7.