MA1301: EN OVERSIKT OVER ARITMETISKE FUNKSJONER

En *aritmetisk funksjon* er en funksjon fra de positive heltallene til de reelle tall. Det ligger dermed implisitt i notasjonen at d, m og n er positive heltall.

Multiplikative funksjoner

En aritmetisk funksjon f er *multiplikativ* hvis

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

for alle m, n med $\gcd(m, n) = 1$.

Teorem (6.4 s. 109)**.** *Hvis f er en multiplikativ funksjon og F er definert ved*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Da er F multiplikativ.

Teorem (6.8 s. 115)**.** *Hvis F er en multiplikativ funksjon slik at*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Da er f multiplikativ.

Divisorfunksjonene τ og σ

Vi definerer $\tau(n)$ til å være antall $d \in [1, n]$ slik at $d|n$, og $\sigma(n)$ til å være summen av disse:

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \qquad \sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Teorem (6.2 s.105)**.** *Hvis $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ er primtallsfaktoriseringen til $n > 1$, da er*

$$\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \cdots (k_r + 1) \tag{1}$$

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdots \frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}. \tag{2}$$

Möbiusfunksjonen μ

For hver $n \geq 1$ er

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } n = 1 \\ 0 & \text{hvis } p^2 | n \text{ for et primtall } p \\ (-1)^r & \text{hvis } n = p_1 p_2 \cdots p_r \text{ for distinkte primtall } p_i \end{cases}$$

Teorem (6.6 s. 113)**.** *For hver $n \geq 1$ så gjelder*

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \textit{hvis } n = 1 \\ 0 & \textit{hvis } n > 1 \end{cases}$$

Teorem (6.7 s. 113)**.** *La F og f være to artimetiske funksjoner slik at*

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Da er

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) F(d).$$

Date: 4. november 2012.

Eulers phi-funksjon ϕ

For hver $n \geq 1$ er $\phi(n)$ antall $d \in [1, n]$ slik at $\gcd(d, n) = 1$.

Teorem (6.2 s. 105)**.** *Hvis $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_r^{k_r}$ er primtallsfaktoriseringen til $n > 1$, da er*

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}\right)\cdots\left(p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}\right) \\ &= n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_r}\right). \end{aligned}$$

Teorem (7.5 s. 137)**.** *Hvis $n \geq 1$ og $\gcd(a, n) = 1$, da er $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.*

Teorem (7.6 s. 141)**.** *For hver $n \geq 1$, så gjelder $n = \sum_{d|n} \phi(d)$.*