MA1202/6202

KROPPEN VÅR

POENGET

En **kropp** er et **tallsystem** hvor vi kan regne "**som vi er vant til**" fra $\mathbb{R}$.

I en kropp kan vi

- legge sammen
- trekke fra
  - ↳ Det finnes en "0"!
- multiplisere
- dividere (bortsett fra med 0)
  - ↳ Det finnes en "1"!
- flytte og løse opp parenteser

DEFINISJON

En **kropp** er en mengde F med to binære operasjoner $+$ og $\cdot$ som oppfyller:

i) $(a+b)+c = a+(b+c)$ og $(a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$

ii) $a+b = b+a$ og $a\cdot b = b\cdot a$

iii) Det finnes $0 \in F$ slik at $0+a = a$

iv) Det finnes $1 \in F$ slik at $1\cdot a = a$

v) For hver $a \in F$ finnes $-a \in F$ slik at $a+(-a) = 0$

vi) For hver $a \in F\setminus\{0\}$ finnes $a^{-1} \in F$ slik at $a\cdot a^{-1} = 1$

vii) $a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c$

NB! i), ii), iii), iv) og vii) må holde for **hver** $a,b,c \in F$!

EKSEMPEL

Er mengden $\mathbb{R}$ av alle reelle tall en kropp?

JA! $\square$

EKSEMPEL

Er mengden $\mathbb{C}$ av alle komplekse tall en kropp?

JA! $\square$

EKSEMPEL

Er mengden $\mathbb{Q}$ av alle rasjonale tall en kropp?

JA! $\square$

EKSEMPEL

Er mengden $\mathbb{Z}$ av alle hele tall en kropp?

NEI! (Vi kan ikke dele på $2 : \mathbb{Z}$.) $\square$

EKSEMPEL (FOR DEN SOM KAN LITT TALLTEORI)

La p være et primtall. Da blir mengden

$$\mathbb{Z}_p = \{0, 1, 2, \ldots, p-2, p-1\}$$

en kropp med addisjon og multiplikasjon modulo p.

Det vil si at: kroppen $\mathbb{Z}_5$ har vi:

$2 + 3 = 0$ og $2 \cdot 3 = 1$