MA1202/6202

ISOMETRI

FORELESNING E22

DEFINISJON

En lineær operator S på et indreproduktrom V er en isometri hvis

$$\|S(\bar{v})\| = \|\bar{v}\| \quad \text{for hver} \quad \bar{v} \in V.$$

SKAL VISE

La S være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom. Da har vi:

$$S \text{ er en isometri} \iff S \text{ er inverterbar og } S^* = S^{-1}.$$

ALTSÅ

i) En isometri på et reelt indreproduktrom er det samme som en ortogonal operator.

ii) En isometri på et komplekst indreproduktrom er det samme som en unitær operator.

OBSERVASJON

Hvis s og t er isometrier på et indreproduktrom, så er $s \circ t$ også en isometri.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

EKSEMPEL

La $0 \leq \theta < 2\pi$ og la $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Da er operatoren $L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ en isometri

($L_A(\bar{x})$ er $\bar{x}$ rotert om origo med vinkelen θ mot klokka.)

$\square$

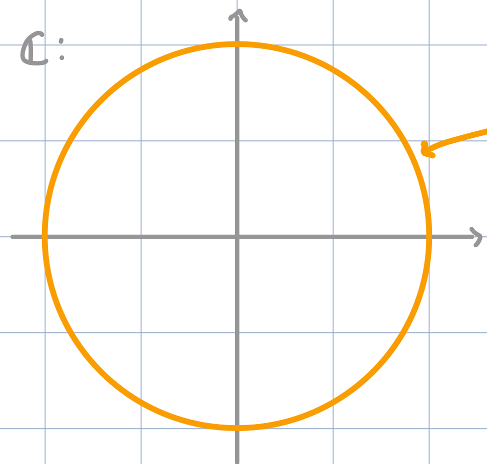
EKSEMPEL

Hvis $\lambda \in F$ er slik at $|\lambda| = 1$, så er operatoren

$$\lambda \cdot id_V : V \longrightarrow V$$

en isometri på hvert indreproduktrom V.

$$\Big[\ \|\lambda \cdot id_V(\bar{v})\|^2 = \langle \lambda \bar{v}, \lambda \bar{v} \rangle = \lambda \bar{\lambda} \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \|\bar{v}\|^2 \quad \forall\ \bar{v} \in V. \qquad \square$$



$\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1 \}$

EKSEMPEL

La s være en linear operator på et indreproduktrom V.
Anta at det finnes

- en ortonormal basis $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ for V og
- skalarer $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in F$ med $|\lambda_i| = 1$ slik at $s(\bar{e}_i) = \lambda_i e_i \quad \forall\ 1 \leq i \leq n$.

Da er s en isometri.

For hver $\bar{v} \in V$ gir TEOREM (!) fra FORELESNING V18 at

$$\bar{v} \overset{(*)}{=} \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n \quad \text{og} \quad \|\bar{v}\|^2 = |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2.$$

Hvis vi bruker s på $(*)$ får vi

s linear antagelse

$$s(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle s(\bar{e}_1) + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle s(\bar{e}_n) = \lambda_1 \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \lambda_n \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n,$$

som i kombinasjon med antagelsen $|\lambda_i| = 1$ gir

$$\|s(\bar{v})\|^2 = |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2.$$

Dette betyr at $\|s(\bar{v})\| = \|\bar{v}\|$. $\square$

TEOREM

La S være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V. De følgende utsagnene er ekvivalente:

a) S er en isometri.

b) $\langle S(\bar{u}), S(\bar{v}) \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$.

c) $S(\bar{e}_1), \dots, S(\bar{e}_n)$ er ortonormal for hver ortonormal liste $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

d) Det eksisterer en ortonormal basis $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ for V slik at $S(\bar{e}_1), \dots, S(\bar{e}_n)$ er ortonormal.

e) $S^* \circ S = id_V$.

f) $S \circ S^* = id_V$.

g) S^* er en isometri.

h) S er inverterbar og $S^{-1} = S^*$.

LEMMA I (BEVIS kommer som samarbeidsoppgave)

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la f og g være lineære operatorer på V. Da har vi:

$$f \circ g = \mathrm{id}_V \iff g \circ f = \mathrm{id}_V .$$

$\square$

LEMMA II (S17. 8 a))

La V være et reelt indreproduktrom. Da har vi:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|^2}{4} \quad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in V.$$

$\square$

LEMMA III (S17. 8 b))

La V være et komplekst indreproduktrom. Da har vi:

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|^2 + \|\bar{u}+i\bar{v}\|^2 i - \|\bar{u}-i\bar{v}\|^2 i}{4} \quad \forall\ \bar{u},\bar{v} \in V.$$

$\square$

BEVIS FOR TEOREM

a) s er en isometri.

b) $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v}) \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$.

c) $s(\bar{e}_1), \ldots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal for hver ortonormal liste $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$.

d) Det eksisterer en ortonormal basis $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ for V slik at $s(\bar{e}_1), \ldots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal.

e) $s^* \circ s = id_V$.

f) $s \circ s^* = id_V$.

g) s^* er en isometri.

h) s er inverterbar og $s^{-1} = s^*$.

Strategi: Vise at

$$a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d) \Rightarrow e) \Rightarrow f) \Rightarrow g) \Rightarrow h) \Rightarrow a)$$

BEVIS FOR TEOREM

[a) => b) => c) => d) => e) => f) => g) => h) => a)]

a) s er en isometri.

b) $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \quad \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V.$

a) => b): Anta at s er en isometri.

Hvis $F = \mathbb{R}$ kan vi bruke LEMMA II:

$$\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \frac{\|s(\bar{u}) + s(\bar{v})\|^2 - \|s(\bar{u}) - s(\bar{v})\|^2}{4}$$

s lineær

$$= \frac{\|s(\bar{u}+\bar{v})\|^2 - \|s(\bar{u}-\bar{v})\|^2}{4}$$

s isometri

$$= \frac{\|\bar{u}+\bar{v}\|^2 - \|\bar{u}-\bar{v}\|^2}{4} = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle$$

Hvis $F = \mathbb{C}$ kan vi på lignende vis bruke LEMMA III til å vise at $\langle \bar{u}, \bar{v}\rangle = \langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle$.

BEVIS FOR TEOREM [a) => b) => c) => d) => e) => f) => g) => h) => a)]

b) $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \quad \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$.

c) $s(\bar{e}_1), \dots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal for hver ortonormal liste $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$.

b) => c): Anta at $\langle s(\bar{u}), s(\bar{v})\rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}\rangle \quad \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V$ og la $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ være ei ortonormal liste. Da er lista $s(\bar{e}_1), \dots, s(\bar{e}_n)$ ortonormal fordi

$$\langle s(\bar{e}_i), s(\bar{e}_j)\rangle = \underbrace{\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j\rangle}_{=\delta_{ij}} \quad \forall\ 1 \le i, j \le n.$$

Husk: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

BEVIS FOR TEOREM [a) => b) => c) => d) => e) => f) => g) => h) => a)]

c) $s(\bar{e}_1), \ldots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal for hver ortonormal liste $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$.

d) Det eksisterer en ortonormal basis $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ for V slik at $s(\bar{e}_1), \ldots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal.

c) => d): Dette er opplagt sant (det finnes en ortonormal basis for V ved KOROLLAR fra FORELESNING V18).

BEVIS FOR TEOREM [a) => b) => c) => d) => e) => f) => g) => h) => a)]

d) Det eksisterer en ortonormal basis $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ for V slik at $s(\bar{e}_1), \dots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal.

e) $s^* \circ s = id_V$.

d) => e): Anta at $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ er en ortonormal basis for V slik at $s(\bar{e}_1), \dots, s(\bar{e}_n)$ er ortonormal. Da har vi

$$\underbrace{\langle \bar{e}_i, \bar{e}_j \rangle}_{=\delta_{ij}} = \underbrace{\langle s(\bar{e}_i), s(\bar{e}_j) \rangle}_{=\delta_{ij}} = \langle s(\bar{e}_i), (s^*)^*(\bar{e}_j) \rangle$$

FUNDAMENTAL EGENSKAP iii)

$$= \langle s^*(s(\bar{e}_i)), \bar{e}_j \rangle \quad \forall\ 1 \leq i, j \leq n$$

DEFINISJONEN AV f^* (MED $f = s^*$)

Dette impliserer

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle s^*(s(\bar{u})), \bar{v} \rangle \quad \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V,$$

siden $\bar{u}$ og $\bar{v}$ kan skrives som linearkombinasjoner av $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$. Dette impliserer i sin tur at $\bar{u} = s^*(s(\bar{u}))\ \forall\ \bar{u} \in V$, altså $s^* \circ s = id_V$.

BEVIS FOR TEOREM [a) => b) => c) => d) => e) => f) => g) => h) => a)]

e) $s^* \circ s = id_V$.

f) $s \circ s^* = id_V$.

e) => f): Dette er LEMMA I .

BEVIS FOR TEOREM [a)=>b)=> c)=> d)=> e)=> f)=> g)=> h)=> a)]

f) $s \circ s^* = id_V$.

g) s^* er en isometri.

f) => g): Anta at $s \circ s^* = id_V$. Da har vi

$$\|s^*(\bar{v})\|^2 = \langle s^*(\bar{v}), s^*(\bar{v}) \rangle$$

DEFINISJONEN AV s^* $= \langle s(s^*(\bar{v})), (\bar{v}) \rangle$

ANTAGELSE $= \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \|\bar{v}\|^2$,

så s^* er en isometri.

BEVIS FOR TEOREM [a) => b) => c) => d) => e) => f) => g) => h) => a)]

g) s^* er en isometri.

h) s er inverterbar og $s^{-1} = s^*$.

g) => h):

Vi har vist:

$$\begin{array}{ll} e) & s^* \circ s = id_V. \\ (*)\Uparrow & \\ a) & s \text{ er en isometri.} \\ (*)\Downarrow & \\ f) & s \circ s^* = id_V. \end{array}$$

Anta at s^* er en isometri. Da kan vi bruke $(*)$ og $(*)$ med s erstattet av s^*, som gir:

FUNDAMENTAL EGENSKAP iii)

$$s \circ s^* = (s^*)^* \circ s^* \overset{(*)}{=} id_V \quad \text{og} \quad id_V \overset{(*)}{=} s^* \circ (s^*)^* = s^* \circ s.$$

Så s er inverterbar med $s^{-1} = s^*$.

BEVIS FOR TEOREM [a) => b) => c) => d) => e) => f) => g) => h) => a)]

h) s er inverterbar og $s^{-1} = s^*$.

a) s er en isometri.

h) => a): Anta at s er inverterbar med $s^{-1} = s^*$.

Da er $s^* \circ s \overset{(*)}{=} id_V$, så

$$\|s(\bar{v})\|^2 = \langle s(\bar{v}), s(\bar{v})\rangle$$

FUNDAMENTAL EGENSKAP iii)
$$= \langle s(\bar{v}), (s^*)^*(\bar{v})\rangle$$

DEFINISJONEN AV f^* (MED $f = s^*$)
$$= \langle s^*(s(\bar{v})), \bar{v}\rangle \overset{(*)}{=} \langle \bar{v}, \bar{v}\rangle = \|\bar{v}\|^2 \quad \forall\ \bar{v} \in V,$$

så s er en isometri. $\square$