MA1202/6202

MINIMERINGSPROBLEMER

FORELESNING E20

La V være et indreproduktrom.

PROJEKSJONSOPERATOREN

DEFINISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Den ortogonale projeksjonen av V på U er operatoren $P_U : V \longrightarrow V$ gitt som følger:

For hver $\bar{v} \in V$ skriv

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med} \quad \bar{u} \in U \quad \text{og} \quad \bar{w} \in U^{\perp}.$$

Da er $P_U(\bar{v}) = \bar{u}$.

MERK

som funksjon

i) I følge TEOREM (ORTOGONAL PROJEKSJON) fra FORELESNING V20 eksisterer $\bar{u}$, og $\bar{u}$ er dessuten entydig. Altså er P_U veldefinert.

ii) Beviset for det samme resultatet gir at

$$P_U(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \ldots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n$$

for en (valgfri) ortonormal basis $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ for U.

DEFINISJON

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom.
Den ortogonale projeksjonen av V på U er operatoren $P_U : V \longrightarrow V$ gitt som følger:

For hver $\bar{v} \in V$ skriv

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med} \quad \bar{u} \in U \quad \text{og} \quad \bar{w} \in U^{\perp}.$$

Da er $P_U(\bar{v}) = \bar{u}$.

MERK

iii) I en samarbeidsoppgave skal vi sjekke at P_U er lineær.

EKSEMPEL

Hvis $U = \operatorname{span}(\bar{x})$ for en $\bar{0} \neq \bar{x} \in V$, så er

$$\bar{v} = \underbrace{\frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2}\bar{x}}_{\in U} + \underbrace{\left(\bar{v} - \frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2}\bar{x}\right)}_{\in U^\perp}$$

som : FORELESNING E17 ("ORTOGONAL DEKOMPONERING"). Dermed er

$$\boxed{P_U(\bar{v}) = \frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2}\bar{x}}$$

EKSEMPEL

La $\bar{x} = (2,1)$ og se på underrommet $U = \text{span}(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^2$.

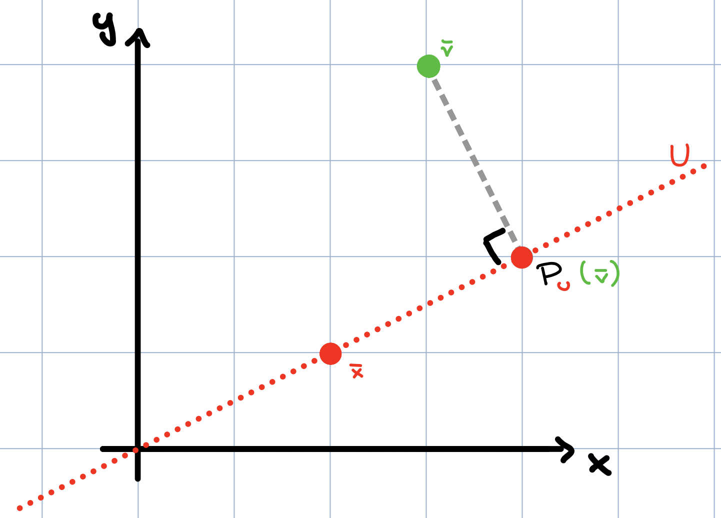
Velg $\bar{v} = (3,4)$.

I et EKSEMPEL i FORELESNING E17 fant vi at

$$\frac{\langle \bar{v}, \bar{x} \rangle}{\|\bar{x}\|^2} = 2$$

så $\bar{v} = \underbrace{2\bar{x}}_{\in U} + \underbrace{(\bar{v} - 2\bar{x})}_{\in U^\perp}$, som betyr at

$$\boxed{P_U(\bar{v}) = 2\bar{x} = (4,2)}.$$

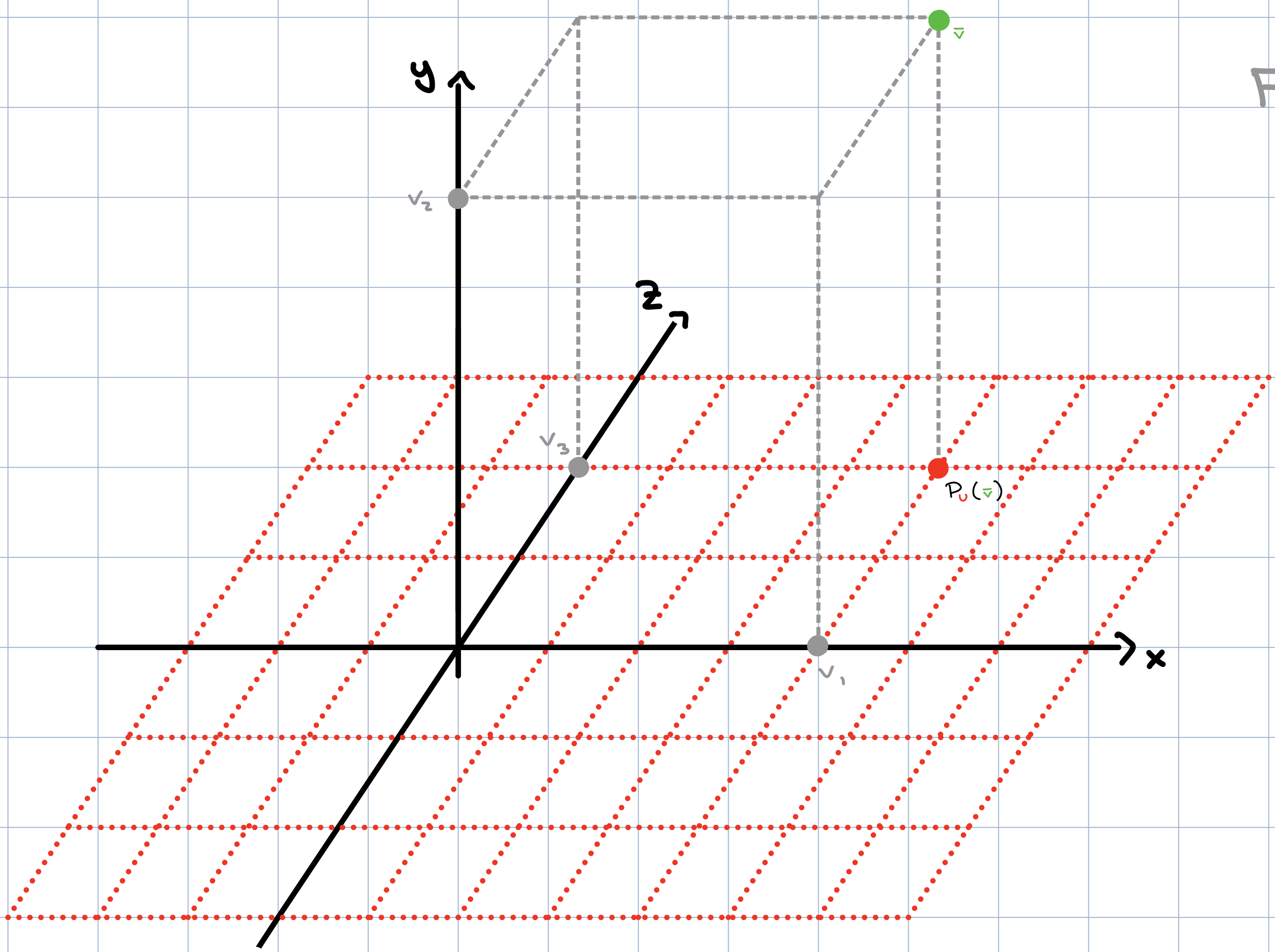


EKSEMPEL

Se på underrommet $U = \{(x,0,z) \mid x,z \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$.

For hver $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ blir

$$\boxed{P_U(\bar{v}) = (v_1, 0, v_3)}$$



Fordi

$$\bar{v} = \underbrace{(v_1, 0, v_3)}_{\in U} + \underbrace{(0, v_2, 0)}_{\in U^\perp}.$$

EKSEMPEL

$\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ er et indreproduktrom med

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx \quad \forall \quad p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$$

Se på underrommet $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ og vektoren $\bar{v} = x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Hva er projeksjonen $P_U(\bar{v})$?

I et EKSEMPEL : FORELESNING V18 fant vi at

$$\left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{=\bar{e}_1}, \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}}\, x}_{=\bar{e}_2}, \underbrace{\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}_{=\bar{e}_3} \right\}$$

er en ortonormal basis for U.

EKSEMPEL (FORTS.)

Da vet vi at

$$P_U(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 + \langle \bar{v}, \bar{e}_3 \rangle \bar{e}_3$$

$$= 0\,\bar{e}_1 + \frac{\sqrt{6}}{5}\,\bar{e}_2 + 0\,\bar{e}_3 = \frac{3}{5}x.$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\,dx = 0$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\,x\,dx = \frac{\sqrt{6}}{5}$$

$$\langle \bar{v}, \bar{e}_3 \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 \cdot \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)dx = 0$$

$\square$

MINIMERING

GENERELT MÅL

Gitt et underrom $U \subset V$ og en vektor $\bar{v} \in V$,
finn en vektor $\bar{u} \in U$ slik at
tallet $\|\bar{v} - \bar{u}\|$ er så lite som mulig.

TEOREM

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom
og la $\bar{v} \in V$. Da er

$$\|\bar{v} - P_U(\bar{v})\| \leq \|\bar{v} - \bar{u}\| \quad \text{for hver } \bar{u} \in U,$$

og dette er en likhet hvis og bare hvis $\bar{u} = P_U(\bar{v})$.

ALTSÅ

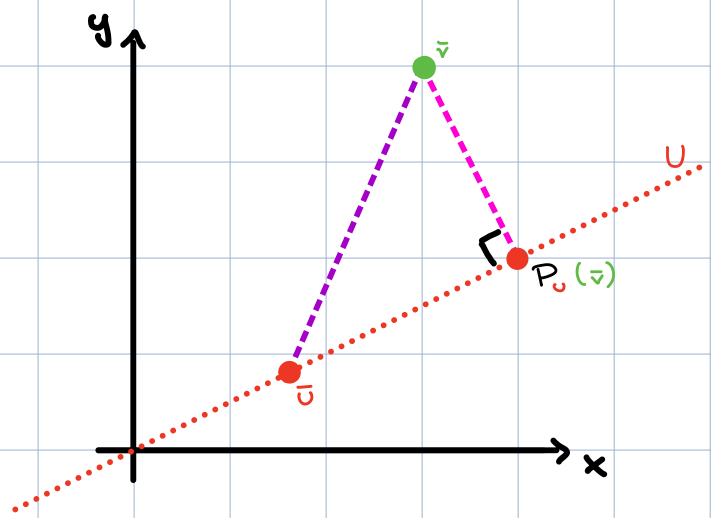
Projeksjonen $P_U(\bar{v})$ er den entydige løsningen
på minimeringsproblemet over!

TEOREM

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom og la $\bar{v} \in V$. Da er

$$\|\bar{v} - P_U(\bar{v})\| \leq \|\bar{v} - \bar{u}\| \quad \text{for hver } \bar{u} \in U,$$

og dette er en likhet hvis og bare hvis $\bar{u} = P_U(\bar{v})$.



$$\|\bar{v} - P_U(\bar{v})\| \leq \|\bar{v} - \bar{u}\|$$

TEOREM

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom og la $\bar{v} \in V$. Da er

$$\|\bar{v} - P_U(\bar{v})\| \leq \|\bar{v} - \bar{u}\| \quad \text{for hver } \bar{u} \in U,$$

og dette er en likhet hvis og bare hvis $\bar{u} = P_U(\bar{v})$.

BEVIS

La $\bar{u} \in U$. Det holder å observere at

$$\|\bar{v} - P_U(\bar{v})\|^2 \overset{(*)}{\leq} \|\bar{v} - P_U(\bar{v})\|^2 + \underbrace{\|P_U(\bar{v}) - \bar{u}\|^2}_{\geq 0}$$

PYTHAGORAS! $(\bar{v} - P_U(\bar{v}) \in U^\perp;\ P_U(\bar{v}) - \bar{u} \in U)$

$$= \|\bar{v} - P_U(\bar{v}) + P_U(\bar{v}) - \bar{u}\|^2 = \|\bar{v} - \bar{u}\|^2$$

og at $(*)$ er en likhet hvis og bare hvis $\|P_U(\bar{v}) - \bar{u}\|^2 = 0$, i.e. hvis og bare hvis $\bar{u} = P_U(\bar{v})$ $\square$

EKSEMPEL

I et tidligere EKSEMPEL fant vi at for underrommet $U = \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ er

$$P_U(x^3) = \frac{3}{5}x .$$

Vårt forrige TEOREM sier at da er

$$\left\| x^3 - \frac{3}{5}x \right\| \leq \left\| x^3 - p(x) \right\|$$

for hver $p(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Dette kan vi tolke som at $\frac{3}{5}x$ er det "punktet" i $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som "ligger nærmest" x^3.

$\square$