MA1202/6202

ORTOGONAL DEKOMPONERING

FORELESNING E17

GREIA

La V være et indreproduktrom med $\bar{o} \neq \bar{v}, \bar{u} \in V$.
(Hvordan) kan vi skrive $\bar{u}$ som summen av

- én vektor som er et skalarmultiplum av $\bar{v}$ og
- én vektor som er ortogonal med $\bar{v}$?

Altså, vi vil ha

$$\bar{u} = c \cdot \bar{v} + \bar{w}$$

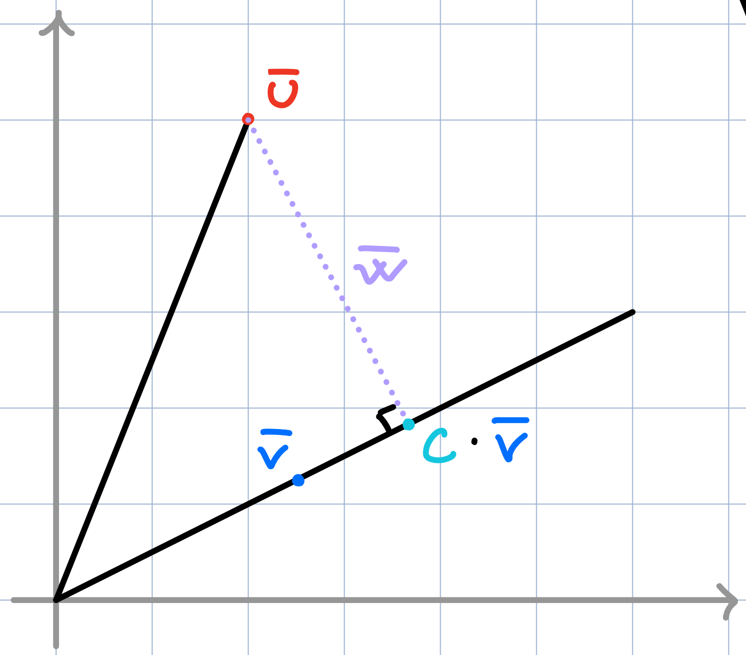
for en skalar c ($c \in \mathbb{R}$ eller $c \in \mathbb{C}$) og en vektor $\bar{w} \in V$ med $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = 0$.

EKSEMPEL

Hva om vi var i $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt?

Altså, gitt $\bar{0} \neq \bar{v}, \bar{u} \in \mathbb{R}^2$. Vi ønsker $c \in \mathbb{R}$ og $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ med $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = 0$ og $\bar{u} = c \cdot \bar{v} + \bar{w}$

$$\bar{u} = c \cdot \bar{v} + \bar{w} \iff \bar{w} \overset{(*)}{=} \bar{u} - c \cdot \bar{v}$$



Vi får ortogonalitet hvis og bare hvis

$$0 = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle \overset{(*)}{=} \langle \bar{u} - c \cdot \bar{v}, \bar{v} \rangle \overset{iii)}{=} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - \langle c \cdot \bar{v}, \bar{v} \rangle \overset{iv)}{=} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - c \cdot \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$

altså

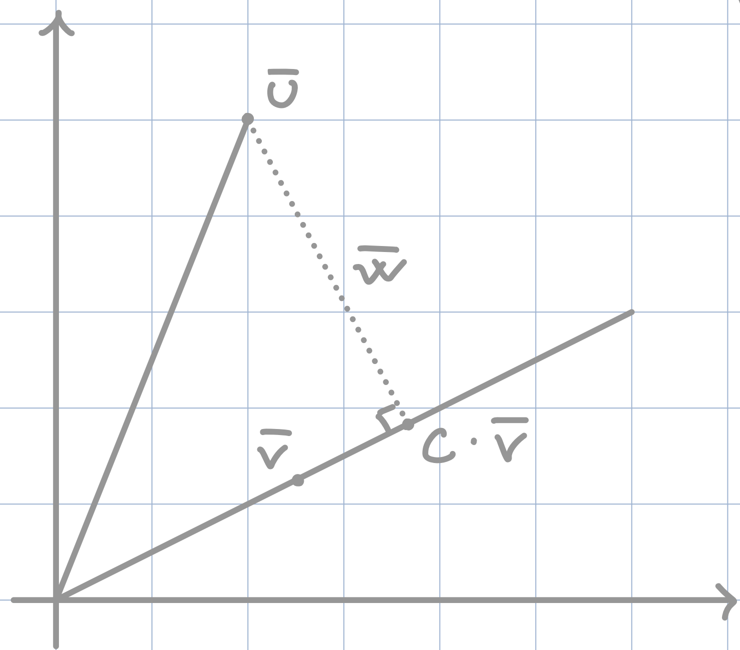
$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2}.$$

EKSEMPEL

Hva om vi var i $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt?

Altså, gitt $\bar{o} \neq \bar{v}$, $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$. Vi ønsker $c \in \mathbb{R}$ og $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$ med $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = 0$ og $\bar{u} = c \cdot \bar{v} + \bar{w}$

$$\bar{u} = c \cdot \bar{v} + \bar{w} \iff \bar{w} = \bar{u} - c \cdot \bar{v}$$



Vi får ortogonalitet hvis og bare hvis

$$0 = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle \overset{(*)}{=} \langle \bar{u} - c \cdot \bar{v}, \bar{v} \rangle \overset{iii)}{=} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - \langle c \cdot \bar{v}, \bar{v} \rangle \overset{iv)}{=} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - c \cdot \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$

altså

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2}.$$

La V være et indreproduktrom over F

Altså, gitt $\bar{0} \neq \bar{v}, \bar{u} \in V$. Vi ønsker $c \in F$ og $\bar{w} \in V$ med $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = 0$ og $\bar{u} = c \cdot \bar{v} + \bar{w}$

$$\bar{u} = c \cdot \bar{v} + \bar{w} \iff \bar{w} = \bar{u} - c \cdot \bar{v}$$

Vi får ortogonalitet hvis og bare hvis

$$\begin{aligned} 0 = \langle \bar{w}, \bar{v} \rangle &\overset{(*)}{=} \langle \bar{u} - c \cdot \bar{v}, \bar{v} \rangle \\ &\overset{iii)}{=} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - \langle c \cdot \bar{v}, \bar{v} \rangle \\ &\overset{iv)}{=} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - c \cdot \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \end{aligned}$$

altså

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle} = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2}.$$

HUSK GREIA

La V være et indreproduktrom med $\bar{0} \neq \bar{v}, \bar{u} \in V$.
(Hvordan) kan vi skrive $\bar{u}$ som summen av

- én vektor som er et skalarmultiplum av $\bar{v}$ og
- én vektor som er ortogonal med $\bar{v}$?

PROPOSISJON (ORTOGONAL DEKOMPONERING)

La V være et indreproduktrom med $\bar{0} \neq \bar{v}, \bar{u} \in V$.
Skriv

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} \quad (\in F) \quad \text{og} \quad \bar{w} = \bar{u} - c \cdot \bar{v} \quad (\in V).$$

Da er $\langle \bar{w}, \bar{v} \rangle = 0$ og $\bar{u} = c \cdot \bar{v} + \bar{w}$. $\square$

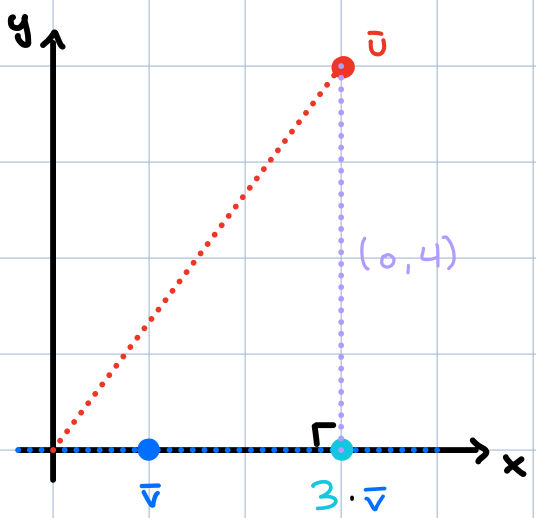
EKSEMPEL

Se på $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt og vektorene

$$\bar{u} = (3,4), \quad \bar{v} = (1,0).$$

Hvordan kan vi skrive $\bar{u}$ som summen av

- én vektor som er et skalarmultiplum av $\bar{v}$ og
- én vektor som er ortogonal med $\bar{v}$?



Vi ser at

$$\bar{u} = \underbrace{3 \cdot \bar{v}}_{\text{skalarmultiplum av } \bar{v}} + \underbrace{(0,4)}_{\text{ortogonal med } \bar{v}}$$

EKSEMPEL (FORTS)

Se på $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt og vektorene

$$\bar{u} = (3,4), \quad \bar{v} = (1,0).$$

Da er

skalarmultiplum av $\bar{v}$

$$\boxed{\bar{u} = 3 \cdot \bar{v} + (0,4)}$$

ortogonal med $\bar{v}$

La oss sjekke at forrige PROPOSISJON gir det samme:

$$\bar{u} = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} \cdot \bar{v} + \left(\bar{u} - \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} \cdot \bar{v} \right)$$

$$= \underbrace{\frac{\langle (3,4), (1,0) \rangle}{\|(1,0)\|^2}}_{= \frac{3\cdot 1 + 4 \cdot 0}{1 \cdot 1 + 0 \cdot 0} = 3} \cdot \bar{v} + \left(\bar{u} - \underbrace{\frac{\langle (3,4), (1,0) \rangle}{\|(1,0)\|^2}}_{=3} \cdot \bar{v} \right) = 3 \cdot \bar{v} + \overbrace{(\bar{u} - 3 \cdot \bar{v})}^{(3,4) - 3 \cdot (1,0) = (0,4)}$$

$$= \boxed{3 \cdot \bar{v} + (0,4)}. \quad \square$$

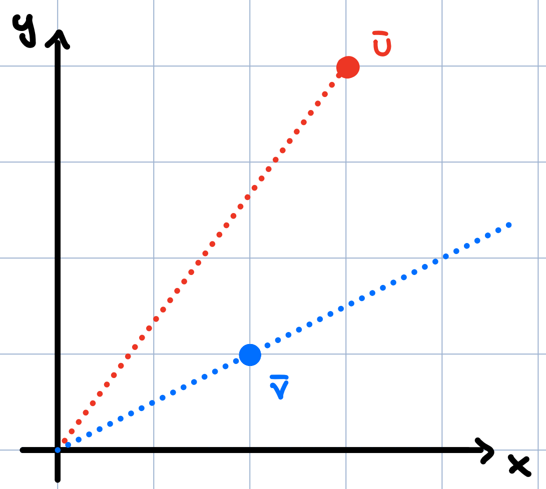
EKSEMPEL

Se på $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt og vektorene

$\bar{u} = (3,4)$, $\bar{v} = (2,1)$.

Hvordan kan vi skrive $\bar{u}$ som summen av

- én vektor som er et skalarmultiplum av $\bar{v}$ og
- én vektor som er ortogonal med $\bar{v}$?



Her ser vi kanskje ikke løsningen like kjapt. La oss bruke forrige PROPOSISJON.

EKSEMPEL (FORTS)

Se på $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt og vektorene

$$\bar{u} = (3,4), \quad \bar{v} = (2,1).$$

Forrige PROPOSISJON sier at vi får

$$\bar{u} = \underbrace{c \cdot \bar{v}}_{\text{skalarmultiplum av } \bar{v}} + \underbrace{\bar{w}}_{\text{ortogonal med } \bar{v}}$$

hvis vi lar

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} \quad \text{og} \quad \bar{w} = \bar{u} - c \cdot \bar{v}.$$

Her er

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle (3,4), (2,1) \rangle = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10$$

og

$$\|\bar{v}\|^2 = \langle (2,1), (2,1) \rangle = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$$

EKSEMPEL (FORTS)

Se på $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt og vektorene $\bar{u} = (3,4)$, $\bar{v} = (2,1)$.

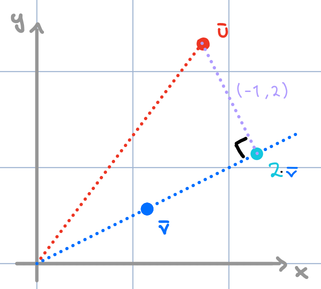
Her er $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 10$ og $\|\bar{v}\|^2 = 5$, så

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} = 2 \quad \text{og} \quad \bar{w} = \bar{u} - c \cdot \bar{v} = \bar{u} - 2\bar{v}.$$

Dermed har vi:

$$(3,4) = 2\cdot(2,1) + \big((3,4) - 2\cdot(2,1)\big)$$

$$= \underbrace{2\cdot(2,1)}_{\text{skalarmultiplum av } (2,1)} + \underbrace{(-1,2)}_{\text{ortogonal med } (2,1)}.$$



$\square$

EKSEMPEL

Se på $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med indreproduktet gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x) q(x)\, dx \qquad \forall \; p, q \in V.$$

Velg $\bar{0} \neq \bar{v} = x$, $\bar{u} = x^2 \in V$. La oss skrive $\bar{u}$ som summen av

- én vektor som er et skalarmultiplum av $\bar{v}$ og
- én vektor som er ortogonal med $\bar{v}$.

Forrige PROPOSISJON sier at vi får

$$\bar{u} = \underbrace{c \cdot \bar{v}}_{\text{skalarmultiplum av } \bar{v}} + \underbrace{\bar{w}}_{\text{ortogonal med } \bar{v}}$$

hvis vi lar

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} \quad \text{og} \quad \bar{w} = \bar{u} - c \cdot \bar{v}.$$

EKSEMPEL (FORTS)

$\bar{0} \neq \bar{v} = x$, $\bar{u} = x^2 \in V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$

Vi får

$$\bar{u} = \underbrace{c \cdot \bar{v}}_{} + \bar{w}$$

ortogonal med $\bar{v}$

skalarmultiplum av $\bar{v}$

hvis vi lar

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} \quad \text{og} \quad \bar{w} = \bar{u} - c \cdot \bar{v}.$$

Her er

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \int_0^1 x^2 \cdot x \, dx = \left[\tfrac{1}{4} x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

og fra et EKSEMPEL i FORELESNING V17 har vi

$$\|\bar{v}\|^2 = \frac{1}{3}.$$

EKSEMPEL (FORTS)

$\bar{0} \neq \bar{v} = x$, $\bar{u} = x^2 \in V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med $\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx$.

Her er $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{1}{4}$ og $\|\bar{v}\|^2 = \frac{1}{3}$, så

$$c = \frac{\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle}{\|\bar{v}\|^2} = \frac{3}{4} \quad \text{og} \quad \bar{w} = \bar{u} - c \cdot \bar{v} = x^2 - \frac{3}{4}x.$$

Dermed har vi:

$$x^2 = \underbrace{\frac{3}{4}x}_{\text{skalarmultiplum av } x} + \underbrace{\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)}_{\text{ortogonal med } x}$$

$\square$