MA1202/6202

LINEÆRT UAVHENGIGE EGENVEKTORER

FORELESNING E11

PROPOSISJON

La $f: V \to V$ være en lineær operator på et endelig-dimensjonalt vektorrom V. La $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in F$ være distinkte (altså $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$) egenverdier for f og la $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m \in V$ være hhv. tilhørende egenvektorer (altså $f(\bar{v}_i) = \lambda_i \bar{v}_i \quad \forall\, i = 1, \dots, m$).

Da er $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$ lineært uavhengig i V.

BEVIS

Anta at $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ er lineært avhengig. Da finnes en minste k slik at $\bar{v}_k \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1})$. Merk at $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}$ er lineært uavhengig.

Vi har altså

$$(*)\ \bar{v}_k = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_{k-1}\bar{v}_{k-1} \quad \text{for skalarer } a_i \in F$$

Hvis vi bruker f på $(*)$, så får vi:

$$\lambda_k \bar{v}_k = f(\bar{v}_k) = f(a_1\bar{v}_1 + \dots + a_{k-1}\bar{v}_{k-1})$$
$$= a_1 f(\bar{v}_1) + \dots + a_{k-1} f(\bar{v}_{k-1})$$
$$= a_1\lambda_1\bar{v}_1 + \dots a_{k-1}\lambda_{k-1}\bar{v}_{k-1}.$$

Hvis vi multipliserer $(*)$ med λ_k, så får vi:

$$\lambda_k\bar{v}_k = a_1\lambda_k\bar{v}_1 + \dots + a_{k-1}\lambda_k\bar{v}_{k-1}.$$

Ved å sammenligne de to uttrykkene for $\lambda_k\bar{v}_k$ får vi

$$a_1\lambda_k\bar{v}_1 + \dots + a_{k-1}\lambda_k\bar{v}_{k-1} = a_1\lambda_1\bar{v}_1 + \dots a_{k-1}\lambda_{k-1}\bar{v}_{k-1}$$

Ved å sammenligne de to uttrykkene for $\lambda_k \bar{v}_k$ får vi:

$$a_1 \lambda_k \bar{v}_1 + \dots + a_{k-1} \lambda_k \bar{v}_{k-1} = a_1 \lambda_1 \bar{v}_1 + \dots a_{k-1} \lambda_{k-1} \bar{v}_{k-1}$$

$$\Rightarrow \bar{0} = a_1 (\lambda_k - \lambda_1) \bar{v}_1 + \dots a_{k-1} (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \bar{v}_{k-1} \quad (**).$$

Siden $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ er distinkte og $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{k-1}$ er lineært uavhengige, impliserer $(**)$ at $a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$.
Da blir

$$\bar{v}_k = a_1 \bar{v}_1 + \dots + a_{k-1} \bar{v}_{k-1} = \bar{0},$$

så $\bar{v}_k$ er ingen egenvektor.

Altså må $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m$ være lineært uavhengig. $\square$