MA1202/6202

UNDERROM AV ENDELIGDIMENSJONALE VEKTORROM

FORELESNING E3

V er et vektorrom over F

TEOREM

La $U \subset V$ være et underrom. Hvis V er endeligdimensjonalt, så er U endeligdimensjonalt.

LEMMA I

Hvis $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\} \subset V$ er lineært avhengig, så finnes en $j \in \{1, \dots, m\}$ slik at

i) $\bar{v}_j \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1})$

ii) $\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_m)$.

BEVIS

i) Siden $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$ er lineært avhengig vet vi at vi kan skrive

$$\bar{0} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_m\bar{v}_m \quad \text{med minst én } a_i \neq 0.$$

Hvis vi lar $j \in \{1, \dots, m\}$ være det største tallet slik at $a_j \neq 0$, så blir

$$(*) \quad \bar{v}_j = -\frac{a_1}{a_j}\cdot\bar{v}_1 - \frac{a_2}{a_j}\cdot\bar{v}_2 - \dots - \frac{a_{j-1}}{a_j}\cdot\bar{v}_{j-1} \in \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1})$$

LEMMA I

Hvis $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\} \subset V$ er lineært avhengig, så finnes en $j \in \{1, \dots, m\}$ slik at

i) $\bar{v}_j \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1})$

ii) $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) = \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_m)$.

BEVIS

$(*)$ $\bar{v}_j = -\frac{a_1}{a_j}\cdot\bar{v}_1 - \frac{a_2}{a_j}\cdot\bar{v}_2 - \dots - \frac{a_{j-1}}{a_j}\cdot\bar{v}_{j-1}$

ii) Det er klart at

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) \supset \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_m).$$

For å vise at

$$\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m) \subset \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_m),$$

la $\bar{u} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m)$. Da finnes $c_i \in F$ slik at

$$\bar{u} = c_1\bar{v}_1 + \dots + c_m\bar{v}_m .$$

Her kan vi erstatte $\bar{v}_j$ med høgresida av $(*)$, som viser at $\bar{u} \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{j-1}, \bar{v}_{j+1}, \dots, \bar{v}_m)$. $\square$

LEMMA II

La V være endeligdimensjonalt. Hvis

- $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\} \subset V$ er lineært uavhengig og
- $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subset V$ utspenner V,

så er $m \leq n$.

BEVIS

Skriv $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$. Anta at $\text{span}(B) = V$ og at $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_m\}$ er lineært uavhengig.

STEG 1 Listen $\bar{v}_1, \bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m$ er lineært avhengig siden $\bar{v}_1 \in \text{span}(B) = V$. Ved LEMMA I kan vi fjerne en $\bar{w}_j$ slik at den nye lista (av lengde n) også utspenner V.

NB! Tilfellet $j=1$ i LEMMA I impliserer $\bar{v}_1 \in \text{span}(\emptyset)$, altså $\bar{v}_1 = \bar{0}$.

LEMMA II

La V være endeligdimensjonalt. Hvis

- $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} \subset V$ er lineært uavhengig og
- $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subset V$ utspenner V,

så er $m \leq n$.

BEVIS

Skriv $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$. Anta at $\text{span}(B) = V$ og at $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ er lineært uavhengig.

STEG i: Etter STEG $i-1$ har vi en liste av lengde n som utspenner V. Hvis vi legger $\bar{u}_i$ til i denne lista, så får vi en lineært avhengig mengde. Ved LEMMA I kan vi fjerne enda en $\bar{w}_j$, og få en ny liste $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i, \bar{w}_{n-i}, \dots, \bar{w}_n$ som også utspenner V.

NB! Den vektoren vi fjerner her må være en $\bar{w}_j$, siden $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_i$ er lineært uavhengig.

LEMMA II

La V være endeligdimensjonalt. Hvis

- $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\} \subset V$ er lineært uavhengig og
- $\{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\} \subset V$ utspenner V,

så er $m \leq n$.

BEVIS

Skriv $B = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_n\}$. Anta at $\text{span}(B) = V$ og at $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ er lineært uavhengig.

Etter m steg er det tomt for $\bar{u}_i$-vektorer, og i hvert steg fantes det en $\bar{w}_j$-vektor som vi kunne fjerne ved LEMMA I. Altså må $m \leq n$. $\square$

TEOREM

La $U \subset V$ være et underrom. Hvis V er endeligdimensjonalt, så er U endeligdimensjonalt.

BEVIS FOR "TEOREM"

La $U \subset V$ være et underrom med V endeligdimensjonalt.

STEG 1 Hvis $U = \{\bar{0}\}$ så er U endeligdimensjonalt.

STEG i Hvis $U = \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1})$ så er U endeligdimensjonalt.

Hvis $U \neq \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1})$ finnes $\bar{v}_i \in U$ med $\bar{v}_i \notin \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1})$.

Etter hvert steg har vi en lineært uavhengig liste (LEMMA I). Ved LEMMA II kan ikke denne lista være lenger enn en utspennende liste for hele V. Det betyr at prosessen til slutt må stoppe, så U er endeligdimensjonalt. $\blacksquare$