Bevis for spektralteoremene

Forelesning V24D

BEVIS FOR

DET KOMPLEKSE SPEKTRALTEOREMET

TEOREM (SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

La f være en linear operator på et endelig-dimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{C}$.
De følgende påstandene er ekvivalente:

a) f er normal.

b) V har en ortonormal basis som består av egenvektorer for f.

c) Det finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

BEVIS

b) $\iff$ c): PROPOSISJON I fra FORELESNING V22 A.

c) $\implies$ a): Anta at c) holder, så matrisa $[f]_\beta$ er diagonal. Siden basisen β er ortogonal har vi

$$[f^*]_\beta = ([f]_\beta)^*$$ (FINT FAKTUM, FORELESNING 22VB),

og denne matrisa er også diagonal.

"D_1 og D_2 diagonale $\Rightarrow D_1 D_2 = D_2 D_1$"

Siden diagonale matriser kommuterer, følger det at

$$
\begin{aligned}
[f \circ f^*]_\beta = [f]_\beta [f^*]_\beta &= [f]_\beta ([f]_\beta)^* \\
&= ([f]_\beta)^* [f]_\beta \\
&= [f^*]_\beta [f]_\beta = [f^* \circ f]_\beta ,
\end{aligned}
$$

TEOREM II, FORELESNING E8

FINT FAKTUM, FORELESNING 22VB

så $f \circ f^* = f^* \circ f$, i.e. f er normal.

BEVIS

a) $\Rightarrow$ c): Ved SCHURS TEOREM (FORELESNING V24A) finnes en ortogonal basis $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, e_n\}$ for V slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Skal vise: f normal $\Rightarrow$ $[f]_\beta$ diagonal.

Observér at siden β er ortogonal blir

- $\|f(\bar{e}_1)\|^2 = |a_{11}|^2$ og
- $\|f^*(\bar{e}_1)\|^2 = |a_{11}|^2 + |a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2$.

LEMMA II FORELESNING V23B

Anta nå at f er normal. Da er $\|f(\bar{e}_1)\| = \|f^*(\bar{e}_1)\|$, så $|a_{12}|^2 + \dots + |a_{1n}|^2 = 0$,

altså $a_{12} = \dots = a_{1n} = 0$.

BEVIS

a) $\Longrightarrow$ c): Ved SCHURS TEOREM (FORELESNING V24A) finnes en ortogonal basis $\beta = \{\bar{e}_1, \dots, e_n\}$ for V slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Skal vise: f normal $\Longrightarrow$ $[f]_\beta$ diagonal.

Observér nå

- $\|f(\bar{e}_2)\|^2 = |a_{22}|^2$ og
- $\|f^*(\bar{e}_2)\|^2 = |a_{22}|^2 + |a_{23}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2$.

LEMMA II
FORELESNING V23

Som over gir egenskapen $\|f(\bar{e}_2)\| = \|f^*(\bar{e}_2)\|$ at

$$|a_{23}|^2 + \dots + |a_{2n}|^2 = 0,$$

altså $a_{23} = \dots = a_{2n} = 0$. Til slutt får vi $a_{ij} = 0 \;\forall\, i \neq j$. $\square$

BEVIS FOR
DET REELLE SPEKTRALTEOREMET

TEOREM (SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{R}$)

La f være en lineær operator på et endelig-dimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{R}$.
De følgende påstandene er ekvivalente:

a) f er selvadjungert.

b) V har en ortonormal basis som består av egenvektorer for f.

c) Det finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

BEVIS

b) $\Longrightarrow$ c): PROPOSISJON I fra FORELESNING V22A.

c) $\Longrightarrow$ a): Hvis $[f]_\beta$ er diagonal så er

$$([f]_\beta)^* = ([f]_\beta)^T = [f]_\beta .$$

FINT FAKTUM, FORELESNING 22VB

Hvis β er ortonormal, så betyr dette at $f = f^*$

a) $\Longrightarrow$ b): Kommer som (omfattende) samarbeidsoppgave. $\square$