ORTOGONAL OG UNITÆR DIAGONALISERING

FORELESNING V24C

OPPSKRIFT

La A være ei symmetrisk matrise over $\mathbb{R}$ (eller ei normal matrise over $\mathbb{C}$).

1) Finn en basis for hvert av egenrommene til A.

2) Bruk Gram-Schmidt-prosessen på hver av basisene fra steg 1) og finn en ortonormal basis for hvert egenrom.

3) La matrisa P ha basisvektorene fra 2) som sine kolonner.

Da er P ortogonal (eller unitær) og $P^{-1}AP$ er diagonal! $\square$

EKSEMPEL I (FORTS.)

Husk: Matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

er symmetrisk, så det finnes ei ortogonal matrise Q slik at $Q^{-1}AQ$ er diagonal.

La oss finne ei slik matrise Q:

1) $\text{charpol}_A = (x-2)^2(x-8)$, så egenverdiene til A er 2 og 8. Basiser for egenrommene er

$$\beta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \beta_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Basis for E_2

Basis for E_8

EKSEMPEL I (FORTS.)

2) Hvis vi bruker Gram – Schmidt-prosessen på β_2 får vi

$$\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \text{Ortonormal basis for } E_2$$

Hvis vi bruker Gram – Schmidt-prosessen på β_8 får vi

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\} \leftarrow \text{Ortonormal basis for } E_8$$

3) Matrisa

$$Q = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

er ortogonal og diagonaliserer A! $\left(Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}\right)$ □

EKSEMPEL IV (FORTS.)

Husk: Matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

er normal, så det finnes ei unitær matrise U slik at $U^{-1}AU$ er diagonal.

La oss finne ei slik matrise U:

1) $\text{charpol}_A = (x-1)(x-4)$, så egenverdiene til A er 1 og 4. Basiser for egenrommene er

$$\beta_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \beta_4 = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis for E_1 Basis for E_4

EKSEMPEL IV (FORTS.)

2) Hvis vi bruker Gram – Schmidt-prosessen på β_1 får vi

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$$

Ortonormal basis for E_1

Hvis vi bruker Gram – Schmidt-prosessen på β_4 får vi

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \right\}$$

Ortonormal basis for E_4

3) Matrisa

$$U = \begin{pmatrix} \frac{-1-i}{\sqrt{3}} & \frac{1+i}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

er unitær og diagonaliserer A! $\left(U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right)$ $\square$

EKSEMPEL III (FORTS.)

Husk: Matrisa $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ er ikke ortogonalt diagonaliserbar, men det finnes ei unitær matrise U slik at $U^{-1}AU$ er diagonal (A er ikke symmetrisk, men A er normal).

La oss finne ei slik matrise U:

1) $\text{charpol}_A = (x-(1-2i))(x-(1+2i))$, så egenverdiene til A er $1-2i$ og $1+2i$. Basiser for egenrommene er

$$\beta_{1-2i} = \left\{ \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{og} \quad \beta_{1+2i} = \left\{ \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Basis for E_{1-2i}

Basis for E_{1+2i}

EKSEMPEL III (FORTS.)

2) Hvis vi bruker Gram–Schmidt-prosessen på β_{1-2i} får vi $\left\{ \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ ← Ortonormal basis for E_{1-2i}

Hvis vi bruker Gram–Schmidt-prosessen på β_{1+2i} får vi $\left\{ \begin{pmatrix} -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$ ← Ortonormal basis for E_{1+2i}

3) Matrisa

$$U = \begin{pmatrix} i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

er unitær og diagonaliserer A! $\left(U^{-1}AU = \begin{pmatrix} 1-2i & 0 \\ 0 & 1+2i \end{pmatrix} \right)$ $\square$