MA1202/6202

SPEKTRALTEOREMENE

FORELESNING V24B

DET REELLE SPEKTRALTEOREMET

TEOREM (SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{R}$)

La f være en lineær operator på et endelig-dimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{R}$.
De følgende påstandene er ekvivalente:

a) f er selvadjungert.

b) V har en ortonormal basis som består av egenvektorer for f.

c) Det finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

MATRISETOLKNING (SPEKTRALTEOREM FOR $F = \mathbb{R}$)

La A vere ei kvadratisk matrise over $\mathbb{R}$.

Da har vi:

$\exists$ ortogonal matrise Q s.a. $Q^{-1}AQ$ er diagonal

A er "ortogonalt diagonaliserbar"

$\iff$

A er symmetrisk $\quad \square$

$A = A^T \; (= A^*)$

Her brukes vi: SPEKTRALTEOREMET FOR $\mathbb{R}$!

EKSEMPEL I

Matrisa
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$
er symmetrisk, så det finnes ei ortogonal matrise Q slik at $Q^{-1}AQ$ er diagonal. $\square$

EKSEMPEL II

Husk matrisa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. A er diagonaliserbar ($Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ for $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se FORELESNING V23A), men siden A ikke er symmetrisk vet vi at det ikke er mulig å ortogonalt diagonalisere A. $\square$

EKSEMPEL III

Matrisa $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ er ikke ortogonalt diagonaliserbar. $\square$

DET KOMPLEKSE SPEKTRALTEOREMET

TEOREM (SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

La f være en lineær operator på et endelig-dimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{C}$.
De følgende påstandene er ekvivalente:

a) f er normal.

b) V har en ortonormal basis som består av egenvektorer for f.

c) Det finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

MATRISETOLKNING (SPEKTRALTEOREM FOR $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

La A være ei kvadratisk matrise over $\mathbb{C}$.

Da har vi:

$\exists$ unitær matrise U s.a.

$U^{-1}AU$ er diagonal

A er "unitært diagonaliserbar"

$\Longleftrightarrow$

A er normal $\square$

$AA^* = A^*A$

EKSEMPEL IV

Her brukes vi

SPEKTRALTEOREMET FOR $\mathbb{C}$!

Matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

er normal (til og med selvadjungert), så det finnes ei unitær matrise U slik at $U^{-1}AU$ er diagonal. $\square$

EKSEMPEL III (FORTS.)

Husk at matrisa $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ikke er ortogonalt diagonaliserbar (fordi A ikke er symmetrisk).

Men vi kan også tenke på A som ei matrise av komplekse tall (altså med imaginærdel lik null):
Siden A er normal ($AA^* = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = A^*A$) vet vi at A er unitært diagonaliserbar, altså at det finnes ei unitær matrise U slik at $U^{-1}AU$ er diagonal.

Her brukes vi:
SPEKTRALTEOREMET FOR $\mathbb{C}$!

Her brukte vi:
SPEKTRALTEOREMET FOR $\mathbb{R}$!

EKSEMPEL II (FORTS.)

Husk at matrisa $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ er diagonaliserbar, men ikke ortogonalt diagonaliserbar (fordi A ikke er symmetrisk).

Siden A ikke engang er normal $\left(A^*A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = AA^*\right)$, er det heller ikke mulig å finne ei unitær matrise som diagonaliserer A. $\square$