SCHURS TEOREM

FORELESNING V24A

HUSK

Ei kvadratisk matrise A er øvre triangulær hvis

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Null under hoveddiagonalen!

HUSK (TEOREM FRA FORELESNING V14)

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{C}$ og la $f : V \to V$ være en lineær operator.

Da finnes en (ordna) basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

SCHURS TEOREM

La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$ og la $f : V \to V$ være en lineær operator.

Da finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

BEVIS FOR SCHURS TEOREM

HUSK (PROPOSISJON II FRA FORELESNING V14)

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom, la $f: V \to V$ være en lineær operator og la $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ være en ordna basis for V.

De følgende utsagnene er ekvivalente.

a) Matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

b) $f(\bar{v}_j) \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j) \quad \forall\ 1 \leq j \leq n$.

c) $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ er f-invariant $\forall\ 1 \leq j \leq n$.

LEMMA

La V være et indreproduktrom.

Hvis det finnes

en (ordna) basis β for V

slik at $[f]_\beta$ er øvre triangulær,

så finnes

en ortonormal basis β' for V

slik at $[f]_{\beta'}$ er øvre triangulær.

BEVIS

Anta at $[f]_\beta$ er øvre triangulær med
$\beta = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$.
Ved PROPOSISJON II fra FORELESNING V14 er da
$\mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_i)$ f-invariant for hver $i = 1, \ldots, n$.

La $\beta' = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ være den ortonormale basisen for V som vi får hvis vi bruker GRAM–SCHMIDT-PROSESSEN på β. Da er
$\mathrm{span}(e_1, \ldots, \bar{e}_i) = \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_i)$ for hver $i = 1, \ldots, n$,
så
$\mathrm{span}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_i)$ er f-invariant for hver $i = 1, \ldots, n$.
Ved PROPOSISJON II fra FORELESNING V14 er
$[f]_{\beta'}$ øvre triangulær. $\square$

SCHURS TEOREM

La V vare et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$ og la $f: V \to V$ vare en linear operator.

Da finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

BEVIS

Ved TEOREM fra FORELESNING V14 finnes en (ordna) basis β for V slik at $[f]_\beta$ er øvre triangulær. Nå følger resultatet fra vårt forrige LEMMA. $\square$

SCHURS TEOREM

La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$ og la $f: V \to V$ være en lineær operator.

Da finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær. $\square$

OBSERVASJON (REELL VERSJON)

La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{R}$ og la $f: V \to V$ være en lineær operator.
Anta at charpol_f splitter (i.e. at alle egenverdiene til f er reelle).
Da finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær. $\square$

MATRISETOLKNING (KOMPLEKS VERSJON)

La A være ei kvadratisk matrise over $\mathbb{C}$.

Da finnes ei unitær matrise U slik at matrisa $U^{-1}AU = U^*AU$ er øvre triangulær. $\square$

MATRISETOLKNING (REELL VERSJON)

La A være ei kvadratisk matrise over $\mathbb{R}$.
Anta at alle egenverdiene til A er reelle.

Da finnes ei ortogonal matrise Q slik at matrisa $Q^{-1}AQ = Q^*AQ$ er øvre triangulær. $\square$