BEVIS FOR TEOREM ☺ FRA V23A

FORELESNING V23B

HUSK DET STORE SPØRSMÅLET

Hvilke operatorer er slik at
distinkte egenverdier har ortogonale egenvektorer?

TEOREM :)

Hvis $f: V \longrightarrow V$ er normal, så vil distinkte egenverdier for f ha ortogonale egenvektorer.

(Altså $\lambda_1 \neq \lambda_2$ og $\bar{v}_1 \neq \bar{0} \neq \bar{v}_2$ med
$f(\bar{v}_1) = \lambda_1 \bar{v}_1$ og $f(\bar{v}_2) = \lambda_2 \bar{v}_2$
$\Rightarrow \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ ortogonal)

LEMMA I

La $f : V \longrightarrow V$ være en linear operator.

i) La $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Hvis

$$\langle f(\bar{v}), \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \quad \bar{v} \in V,$$

så er $f = 0$.

ii) La $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Hvis f er selvadjungert og

$$\langle f(\bar{v}), \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \quad \bar{v} \in V,$$

så er $f = 0$.

i) La $F = \mathbb{C}$. Hvis $\langle f(\bar{v}), \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \quad \bar{v} \in V$,
så er $f = 0$.

BEVIS

Triks: $\forall \quad \bar{u}, \bar{w} \in V$ har vi

Bare sjekke selv!

$$\langle f(\bar{u}), \bar{w} \rangle \overset{(*)}{=} \frac{\langle f(\bar{u}+\bar{w}), \bar{u}+\bar{w} \rangle - \langle f(\bar{u}-\bar{w}), \bar{u}-\bar{w} \rangle}{4}$$

$$+ \frac{\langle f(\bar{u}+i\bar{w}), \bar{u}+i\bar{w} \rangle - \langle f(\bar{u}-i\bar{w}), \bar{u}-i\bar{w} \rangle}{4} i.$$

Poenget: Hvert ledd på høyre side av $(*)$ er på formen

$\langle f(\bar{v}), \bar{v} \rangle$. $\quad (\bar{v} = \bar{u}+\bar{w} \ ; \ \bar{v} = \bar{u}-\bar{w} \ ; \ \bar{v} = \bar{u}+i\bar{w} \ ; \ \bar{v} = \bar{u}-i\bar{w})$

Dermed gir antagelsen at $\langle f(\bar{u}), \bar{w} \rangle = 0 \quad \forall \quad \bar{u}, \bar{w} \in V$.
Dette impliserer $f = 0$ (velg $\bar{w} = f(\bar{u})$).

ii) La $F = \mathbb{R}$. Hvis f er selvadjungert og $\langle f(\bar{v}), \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \ \bar{v} \in V$, så er $f = 0$.

BEVIS

Triks: $\forall \ \bar{u}, \bar{w} \in V$ har vi

$$\langle f(\bar{u}), \bar{w} \rangle \overset{(*)}{=} \frac{\langle f(\bar{u}+\bar{w}), \bar{u}+\bar{w} \rangle - \langle f(\bar{u}-\bar{w}), \bar{u}-\bar{w} \rangle}{4}$$

(sjekk selv igjen; du kan bruke likhetene
$\langle f(\bar{w}), \bar{u} \rangle \underset{f=f^*}{=} \langle \bar{w}, f(\bar{u}) \rangle \underset{F=\mathbb{R}}{=} \langle f(\bar{u}), \bar{w} \rangle$.)

Nå kan vi bruke $(*)$ til å vise at $f = 0$
(samme idé som i tilfellet $F = \mathbb{C}$ over). $\square$

LEMMA II

La $f: V \to V$ være en linear operator. Da har vi:

$$f \text{ er normal} \iff \|f(\bar{v})\| = \|f^*(\bar{v})\| \quad \forall \ \bar{v} \in V.$$

BEVIS

FINT FAKTUM: Operatoren $f^* \circ f - f \circ f^*$ er selvadjungert.
(Bevis kommer som samarbeidsoppgave.)

Nå følger det vi vil vise:

$$\begin{aligned}
f \text{ normal} &\overset{\text{DEFINISJON}}{\iff} f^* \circ f = f \circ f^* \\
&\iff f^* \circ f - f \circ f^* = 0 \\
&\overset{\text{LEMMA I}}{\iff} \langle (f^* \circ f - f \circ f^*)(\bar{v}), \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \bar{v} \in V \\
&\overset{\text{FUNDAMENTAL EGENSKAP}}{\iff} \langle f^* \circ f(\bar{v}), \bar{v} \rangle - \langle f \circ f^*(\bar{v}), \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \bar{v} \in V \\
&\overset{\text{DEFINISJON AV } f^* \text{ OG } (f^*)^* = f}{\iff} \langle f(\bar{v}), f(\bar{v}) \rangle - \langle f^*(\bar{v}), f^*(\bar{v}) \rangle = 0 \quad \forall \bar{v} \in V \\
&\iff \|f(\bar{v})\|^2 - \|f^*(\bar{v})\|^2 = 0 \quad \forall \bar{v} \in V. \ \square
\end{aligned}$$

LEMMA III

Anta at $f: V \longrightarrow V$ er normal.

Hvis

$\bar{v} \in V$ er en egenvektor for f tilhørende egenverdien λ

så er

$\bar{v}$ en egenvektor for f^* tilhørende egenverdien $\overline{\lambda}$.

Konjugering i $\mathbb{C}$

BEVIS

FINT FAKTUM: f normal $\Rightarrow$ $f - \lambda \cdot id_V$ normal $\forall\ \lambda \in F$.

(Bevis kommer som samarbeidsoppgave.)

Så hvis f er normal og $\bar{v}$ er en egenvektor med $f(\bar{v}) \overset{(*)}{=} \lambda \bar{v}$, blir

$$0 \overset{(*)}{=} \|(f - \lambda \cdot id_V)\bar{v}\| = \|(f - \lambda \cdot id_V)^*\bar{v}\| \overset{(**)}{=} \|(f^* - \overline{\lambda} \cdot id_V)\bar{v}\|,$$

FINT FAKTUM & LEMMA II

så $f^*(\bar{v}) \overset{(**)}{=} \overline{\lambda}\bar{v}$.

$\square$

TEOREM

Hvis $f : V \longrightarrow V$ er normal, så vil distinkte egenverdier for f ha ortogonale egenvektorer.

BEVIS

La $\alpha \neq \beta$ være egenverdier for f med tilhørende egenvektorer $\bar{u}, \bar{v} \in V$, altså $f(\bar{u}) \overset{(*)}{=} \alpha \bar{u}$ og $f(\bar{v}) \overset{(**)}{=} \beta \bar{v}$.

Skal vise: f normal $\Rightarrow$ $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$.

Så anta at f er normal. Ved LEMMA III er $f^*(\bar{v}) = \overline{\beta}\bar{v}$, så

$$
\begin{aligned}
(\alpha - \beta)\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle &= \alpha \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle - \beta \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \\
&= \langle \alpha \bar{u}, \bar{v} \rangle - \langle \bar{u}, \overline{\beta}\bar{v} \rangle \\
&\overset{(*)\ \&\ (**)}{=} \langle f(\bar{u}), v \rangle - \langle \bar{u}, f^*(\bar{v}) \rangle \overset{\text{DEFINISJON AV } f^*}{=} 0.
\end{aligned}
$$

Siden $\alpha - \beta \neq 0$ betyr dette at $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0$. $\square$