MA1202/6202

NORMALE OG SELVADJUNGERTE MATRISER OG OPERATORER

FORELESNING V23A

MINNER OM ("VIRKELIG SPØRSMÅL", 22V)

Gitt $f : V \longrightarrow V$, når finnes det en ortonormal basis β for V slik at $[f]_\beta$ er diagonal?

MATRISEVERSJON (MED $F = \mathbb{R}$)

La A være ei $(n \times n)$-matrise over $\mathbb{R}$.
Når finnes det ei ortogonal matrise Q slik at $Q^{-1}AQ$ er diagonal?

EKVIVALENT

Når finnes det en ortonormal basis for V som består av egenvektorer for f?

Når finnes det en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A?

Når finnes det en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A ?

EKSEMPEL

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Egenverdiene til A er 1 og 2, og egenrommene er

$$E_1 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad \text{og} \quad E_2 = \text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Da er

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

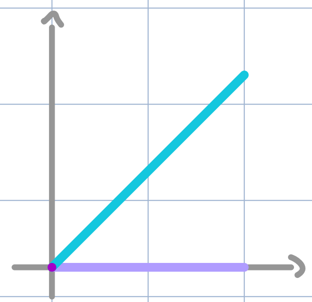
Matrisa Q er inverterbar, men ikke ortogonal

Altså,

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

er en basis for $\mathbb{R}^2$,

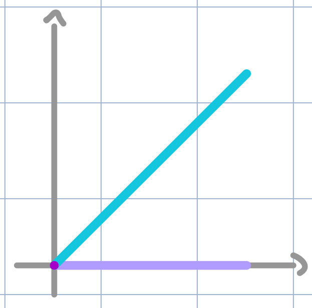
men ikke en ortonormal basis:



Når finnes det en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A ?

PROBLEMET

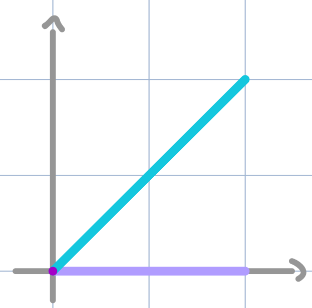
Hvis $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ er distinkte egenverdier med tilhørende egenvektorer $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$, hhv., så er $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ lineært uavhengig (PROPOSISJON, FORELESNING E11), men ikke nødvendigvis ortogonal.



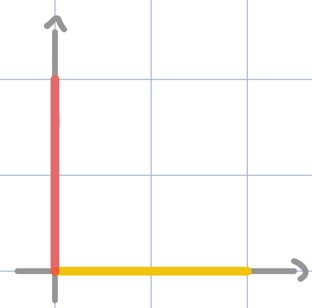
HVA OM VI ...

... bruker Gram-Schmidt-prosessen på $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$?

Da får vi en ortonormal basis $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, men denne består ikke nødvendigvis av egenvektorer!



G–S $\rightsquigarrow$



Når finnes det en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A ?

DET STORE SPØRSMÅLET

Hvilke matriser er slik at distinkte egenverdier har ortogonale egenvektorer?

NORMALE

MATRISER OG OPERATORER

EN NØDVENDIG BETINGELSE

Anta at det finnes ei ortogonal matrise Q (altså $Q^{-1} \overset{(*)}{=} Q^*$) slik at $Q^{-1}AQ = D$ er diagonal.

Da er $D = Q^*AQ$ og

$$D^* = (Q^*AQ)^* = Q^*A^*Q^{**} = Q^*A^*Q$$ er også diagonal, så

$$DD^* = (Q^*AQ)(Q^*A^*Q) \overset{(*)}{=} Q^*AA^*Q$$

Diagonale matriser kommuterer

$$\|$$

$$D^*D = (Q^*A^*Q)(Q^*AQ) \overset{(*)}{=} Q^*A^*AQ$$

$$\Rightarrow \quad Q^*AA^*Q = Q^*A^*AQ$$

$$\Rightarrow \quad Q(Q^*AA^*Q)Q^* = Q(Q^*A^*AQ)Q^*$$

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \quad A^*A = AA^*$$

□

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise A er **normal** hvis $A^*A = AA^*$.

EKSEMPEL

Enhver **diagonal** matrise er normal.

A diagonal $\Rightarrow$ A^* diagonal

$\Rightarrow$ $AA^* = A^*A$ (diagonale matriser kommuterer!). $\square$

EKSEMPEL

La $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$. Da er $A^* = A^T = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ og

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 & 0 \\ 0 & 29 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = AA^*,$$

så A er normal. $\square$

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise A er **normal** hvis $A^*A = AA^*$.

EKSEMPEL

Enhver **ortogonal** matrise er normal.

A ortogonal $\Rightarrow A^* = A^T = A^{-1}$

$\Rightarrow A^*A = I = AA^*$. $\square$

EKSEMPEL

Enhver **unitær** matrise er normal.

A unitær $\Rightarrow A^* = A^{-1}$

$\Rightarrow A^*A = I = AA^*$. $\square$

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise A er **normal** hvis $A^*A = AA^*$.

EKSEMPEL

La $A = \begin{pmatrix} -i & 2+i \\ -2+i & 0 \end{pmatrix}$. Da er $A^* = \begin{pmatrix} i & -2-i \\ 2-i & 0 \end{pmatrix} = -A$ så og $A^*A = -A^2 = AA^*$,

A er normal. $\square$

EKSEMPEL

La $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Da er $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ og

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = AA^*,$$

så A er normal. $\square$

DEFINISJON

En lineær operator f på et indreproduktrom er **normal** hvis $f^* \circ f = f \circ f^*$.

FINT FAKTUM I

La A være ei kvadratisk matrise. Da har vi:

$$\text{Matrisa } A \text{ er normal}$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\text{Operatoren } L_A \text{ er normal}$$

BEVIS

Det holder å huske at $L_{A^*} = (L_A)^*$ fra KOROLLAR III, FORELESNING V22. $\square$

HUSK DET STORE SPØRSMÅLET

Hvilke operatorer er slik at distinkte egenverdier har ortogonale egenvektorer?

TEOREM ☺

Hvis $f: V \longrightarrow V$ er normal, så vil distinkte egenverdier for f ha ortogonale egenvektorer.

(Altså $\lambda_1 \neq \lambda_2$ og $\bar{v}_1 \neq \bar{0} \neq \bar{v}_2$ med

$f(\bar{v}_1) = \lambda_1 \bar{v}_1$ og $f(\bar{v}_2) = \lambda_2 \bar{v}_2$

$\Rightarrow \{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ ortogonal)

SELVADJUNGERTE MATRISER OG OPERATORER

VIKTIG/OPPLAGT EKSEMPEL

Hvis ei matrise A er slik at $A^* = A$, så er A normal. $A^*A = AA^*$

DEFINISJON

Ei matrise A er selvadjungert hvis $A^* = A$.

TERMINOLOGI

- Ei selvadjungert matrise over $\mathbb{C}$ blir også kalt hermitisk.
- Ei selvadjungert matrise over $\mathbb{R}$ ($A^* = A^T$) blir kalt symmetrisk (og ER symmetrisk om hoved-diagonalen, e.g. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \\ 7 & 3 & 9 \end{pmatrix}$).

DEFINISJON

En linear operator f på et indreproduktrom er **selvadjungert** hvis $f^* = f$.

FINT FAKTUM II

La A være ei kvadratisk matrise. Da har vi:

$$\text{Matrisa } A \text{ er selvadjungert} \iff \text{Operatoren } L_A \text{ er selvadjungert}$$

BEVIS

Det holder å huske at $L_{A^*} = (L_A)^*$ fra KOROLLAR III, FORELESNING V22. $\square$