MA1202/6202

ADJUNGERTE OPERATORER

FORELESNING V22B

MERK

Funksjonen $f^* : W \longrightarrow V$ (altså slik at

$\langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) \rangle = \langle f(\bar{v}), \bar{w} \rangle \quad \forall \ \bar{v} \in V, \ \bar{w} \in W$)

eksisterer!

La $\bar{w} \in W$. Vi har en lineær funksjonal $\phi : V \longrightarrow F$ gitt ved

$$\phi(\bar{v}) = \langle f(\bar{v}), \bar{w} \rangle \quad \forall \ \bar{v} \in V \qquad (\phi = \langle -, \bar{w} \rangle \circ f).$$

Ved TEOREM! fra FORELESNING 19v eksisterer en entydig vektor $\bar{x} \in V$ s.a. $\phi = \langle -, \bar{x} \rangle$.

Så vi definerer $f^* : W \longrightarrow V$ ved $f^*(\bar{w}) = \bar{x}$.

Da får vi

$$\langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) \rangle = \langle f(\bar{v}), \bar{w} \rangle \quad \forall \ \bar{v} \in V.$$

DEFINISJON

La $f : V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon mellom endeligdimensjonale indreproduktrom.

Den adjungerte til f er funksjonen

$$f^* : W \longrightarrow V$$

som er slik at

$$\langle f(\bar{v}), \bar{w} \rangle = \langle \bar{v}, f^*(\bar{w}) \rangle \quad \forall\, \bar{v} \in V \quad \forall\, \bar{w} \in W.$$

PROPOSISJON II

Funksjonen $f^* : W \longrightarrow V$ er en lineærtransformasjon.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

FUNDAMENTALE EGENSKAPER

La V og W være endeligdimensjonale indreproduktrom.

i) $(f+g)^* = f^* + g^*$

ii) $(\lambda f)^* = \overline{\lambda} f^*$ Konjugering i $\mathbb{C}$

iii) $(f^*)^* = f$

iv) $(id_V)^* = id_V$

$\forall$ lineærtransformasjoner $f, g : V \longrightarrow W$

$\forall \lambda \in F$

BEVIS

Samarbeidsoppgave. $\square$

La U også være et endeligdimensjonalt indreproduktrom.

v) $(f \circ h)^* = h^* \circ f^*$

$\forall$ lineærtransformasjoner $h : U \longrightarrow V$ og $f : V \longrightarrow W$.

FINT FAKTUM

La $\beta \subset V$ og $\beta' \subset W$ være ortonormale basiser. Da er

$$[f^*]_{\beta'}^{\beta} = \left([f]_{\beta}^{\beta'}\right)^*$$

Matriserepresentasjonen til den adjungerte til f

Den konjugerttransponerte til matriserepresentasjonen til f

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

KOROLLAR III

La A være ei $(m \times n)$-matrise. Da blir

$$(L_A)^* = L_{A^*} : F^m \longrightarrow F^n \qquad \square$$

$$[f^*]^{\beta}_{\beta'} = \left([f]^{\beta'}_{\beta}\right)^*$$

EKSEMPEL

La $\mathbb{C}^2$ og $\mathbb{C}^3$ ha de respektive euklidske indre-produktene og se på lineærtransformasjonen

$$f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2$$

gitt ved

$$f(z_1, z_2, z_3) = (2z_1 + 4z_2 - iz_3 \,,\; 3iz_1 - 2z_2 + 7z_3)$$

Med standardbasisene $\alpha \subset \mathbb{C}^3$ og $\beta \subset \mathbb{C}^2$ blir

$$[f]^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -i \\ 3i & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Da blir (ifølge FINT FAKTUM) $[f^*]^{\alpha}_{\beta} = \left([f]^{\beta}_{\alpha}\right)^* = \begin{pmatrix} 2 & -3i \\ 4 & -2 \\ i & 7 \end{pmatrix}$

Det betyr at $f^* : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ er lineærtransformasjonen gitt ved

$$f^*(z_1, z_2) = (2z_1 - 3iz_2 \,,\; 4z_1 - 2z_2 \,,\; iz_1 + 7z_2).$$

$\square$

$$[f^*]^{\beta}_{\beta'} = \left([f]^{\beta'}_{\beta}\right)^*$$

EKSEMPEL

La $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ ha de respektive euklidske indreproduktene og se på lineærtransformasjonen

$$f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

gitt ved $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + 4x_2 + x_3,\ 3x_1 - 2x_2 + 7x_3)$

Med standardbasisene $\alpha \subset \mathbb{R}^3$ og $\beta \subset \mathbb{R}^2$ blir

$$[f]^{\beta}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Da blir (ifølge FINT FAKTUM) $[f^*]^{\alpha}_{\beta} = \left([f]^{\beta}_{\alpha}\right)^* \overset{\left([f]^{\beta}_{\alpha}\right)^T}{=} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Det betyr at $f^*: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er lineærtransformasjonen gitt ved

$$f^*(x_1, x_2) = (2x_1 + 3x_2,\ 4x_1 - 2x_2,\ x_1 + 7x_2).$$

□

HUSK

- Ei kvadratisk matrise Q over $\mathbb{R}$ kalles ortogonal hvis $(Q^* =)\ Q^T = Q^{-1}$.
- Ei kvadratisk matrise U over $\mathbb{C}$ kalles unitær hvis $U^* = U^{-1}$.

DEFINISJON

La $f : V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{F}$.
Hvis $f^* = f^{-1}$ så sier vi at

- f er ortogonal hvis $\mathbb{F} = \mathbb{R}$
- f er unitær hvis $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

OBSERVASJON IV

La $f : V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V over F. Da har vi:

OPERATOR!

MATRISE!

f er ortogonal (eller unitær)

$$\Longleftrightarrow$$

Det finnes en ortonormal basis β for V slik at $[f]_\beta$ er ortogonal (eller unitær).

$$\Longleftrightarrow$$

$[f]_\beta$ er ortogonal (eller unitær) for enhver ortonormal basis β for V.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave.

$\square$

KOROLLAR IV

La A være ei $(n \times n)$-matrise over $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$).

Da har vi:

A er ortogonal (eller unitær)

$$\Longleftrightarrow$$

$L_A : F^n \to F^n$ er ortogonal (eller unitær) $\square$

MATRISE!

OPERATOR!