UNITÆRE OG ORTOGONALE MATRISER

FORELESNING V22A

MOTIVASJON OG PLAN

La A være ei $(n \times n)$-matrise over $\mathbb{R}$

PERSPEKTIV: $\mathbb{R}^n$ ER BARE ET VEKTORROM

Når kan vi finne
ei matrise Q
slik at $Q^{-1}AQ$ blir diagonal?

PERSPEKTIV: $\mathbb{R}^n$ ER ET INDREPRODUKTROM

Når kan vi finne
ei matrise Q som bevarer indreproduktet
slik at $Q^{-1}AQ$ blir diagonal?

Når kan vi finne
ei matrise Q som bevarer indreproduktet
slik at $Q^{-1}AQ$ blir diagonal?

PLAN

1) Forstå operatorene som bevarer indreprodukt!
(V22 og E22)

2) Svare på spørsmålet!
(V23, V24 og E24)

ORTOGONALE MATRISER

Hvilke matriser bevarer euklidsk indreprodukt?

HUSK

Den transponerte av ei matrise A er matrisa A^T som har radene i A som kolonner (i samme rekkefølge). Altså $(A^T)_{i,j} = A_{j,i}$.

EKSEMPEL

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -i \\ 3i & -2 & 7 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3i \\ 4 & -2 \\ -i & 7 \end{pmatrix}$$

Hvilke matriser bevarer euklidsk indreprodukt?

HUSK (S17.9)

Tenk på $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ som kolonnevektorer. Da er

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \bar{y}^T \cdot \bar{x}$$

Matriseprodukt!

EKSEMPEL

For

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

blir

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$$
$$= y_1 x_1 + y_2 x_2 + y_3 x_3 = (y_1, y_2, y_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \bar{y}^T \cdot \bar{x}.$$

$\square$

Hvilke matriser bevarer euklidsk indreprodukt?

HUSK (S17.9)

Tenk på $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ som kolonnevektorer. Da er

$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \bar{y}^T \cdot \bar{x}$$

Matriseprodukt! ("$(1 \times n) \cdot (n \times 1) = (1 \times 1)$")

ALTSÅ

La Q være ei reell $(n \times n)$-matrise. Da blir

$$\langle Q\bar{x}, Q\bar{y} \rangle = (Q\bar{y})^T Q\bar{x} = \bar{y}^T Q^T Q \bar{x}.$$

Dermed:

$$Q \text{ bevarer indreproduktet}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\langle Q\bar{x}, Q\bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$Q^T Q = I_{n \times n}, \quad \text{i.e. } Q^T = Q^{-1}. \qquad \square$$

HUSK / DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise Q over $\mathbb{R}$ kalles **ortogonal** hvis $Q^T = Q^{-1}$.

EKSEMPEL

Matrisa

$$Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

er ortogonal for hver $\theta \in \mathbb{R}$.

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

HUSK / DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise Q over $\mathbb{R}$ kalles ortogonal hvis $Q^T = Q^{-1}$.

EKSEMPEL

Matrisa

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

er ortogonal

$$Q^TQ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \left(\bar{c}_1 \mid \bar{c}_2 \mid \bar{c}_3 \right)$$

Når er $A^T = A^{-1}$?

$$A^TA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}a_{11} + a_{21}a_{21} + a_{31}a_{31} & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} \\ a_{12}a_{11} + a_{22}a_{21} + a_{32}a_{31} & a_{12}a_{12} + a_{22}a_{22} + a_{32}a_{32} & a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} \\ a_{13}a_{11} + a_{23}a_{21} + a_{33}a_{31} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} + a_{33}a_{32} & a_{13}a_{13} + a_{23}a_{23} + a_{33}a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \langle \bar{c}_1, \bar{c}_1 \rangle & \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2 \rangle & \langle \bar{c}_1, \bar{c}_3 \rangle \\ \langle \bar{c}_2, \bar{c}_1 \rangle & \langle \bar{c}_2, \bar{c}_2 \rangle & \langle \bar{c}_2, \bar{c}_3 \rangle \\ \langle \bar{c}_3, \bar{c}_1 \rangle & \langle \bar{c}_3, \bar{c}_2 \rangle & \langle \bar{c}_3, \bar{c}_3 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \langle \bar{c}_i, \bar{c}_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow \{ c_1, c_2, c_3 \} \text{ ortonormal}$$

HUSK/OBSERVASJON I

La Q være ei $(n \times n)$-matrise over $\mathbb{R}$. Da har vi:

$$Q \text{ er ortogonal}$$

$$\Longleftrightarrow$$

mhp. euklidsk indreprodukt

Kolonnene i Q danner en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.

BEVIS

La

$$Q = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = (\bar{c}_1 \mid \bar{c}_2 \mid \cdots \mid \bar{c}_n).$$

Da er

$$(Q^T Q)_{ij} = \langle \bar{c}_i , \bar{c}_j \rangle ,$$

så $Q^T = Q^{-1} \Longleftrightarrow \{\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n\}$ er ortonormal. $\square$

FUNDAMENTALE EGENSKAPER

i) Inversen til ei ortogonal matrise er ortogonal.

ii) Et produkt av ortogonale matriser er ortogonal.

iii) Determinanten til ei ortogonal matrise er ± 1.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

HUSK VÅRT PROBLEM

Når kan vi finne
ei matrise Q som bevarer indreproduktet
slik at $Q^{-1}AQ$ blir diagonal?

Altså ei matrise som bevarer indreproduktet

KOROLLAR I (OMFORMULERING)

Det finnes ei ortogonal matrise Q slik at
$Q^{-1}AQ$ blir diagonal

$$\Longleftrightarrow$$

Det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som består av egenvektorer for A.

BEVIS

Alt fungerer som for "vanlig" diagonalisering; adjektivene ortogonal/ortonormal ødelegger ikke noe. $\square$

UNITÆRE MATRISER

DEFINISJON/HUSK

La A være ei matrise. Den konjugerttransponerte til A er matrisa $A^* (= \overline{A}^T)$ gitt ved $(A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$.

Altså, vi finner A^* ved å transponere A og komplekskonjugere i hver posisjon.

EKSEMPEL

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -i \\ 3i & -2 & 7 \end{pmatrix} \implies A^* = \begin{pmatrix} 2 & -3i \\ 4 & -2 \\ i & 7 \end{pmatrix} \qquad \square$$

EKSEMPEL

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix} \implies B^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = B^T \qquad \square$$

OBSERVASJON II

La U være ei kompleks $(n \times n)$-matrise. Da blir

$$\langle U\bar{x}, U\bar{y} \rangle = \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \quad \forall\ \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{C}^n$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$U^*U = I_{n \times n}, \quad \text{i.e.} \quad U^* = U^{-1}$$

[Akkurat som over ($(-)^*$ i stedet for $(-)^T$).]

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise U over $\mathbb{C}$ kalles **unitær** hvis $U^* = U^{-1}$.

EKSEMPEL

Enhver ortogonal matrise er unitær (hver matrise over $\mathbb{R}$ kan betraktes som ei matrise over $\mathbb{C}$). □

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise U over $\mathbb{C}$ kalles **unitær** hvis $U^* = U^{-1}$.

EKSEMPEL

Matrisa

$$U = \begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix}$$

er unitær.

$$U^*U = \begin{pmatrix} \frac{1-i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1-i}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \\ \frac{1-i}{2} & \frac{-1+i}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\square$

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise U over $\mathbb{C}$ kalles **unitær** hvis $U^* = U^{-1}$.

EKSEMPEL

Matrisa

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\theta} & e^{-i\theta} \\ ie^{i\theta} & -ie^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

er unitær for hver $\theta \in \mathbb{R}$. $\square$

OBSERVASJON III

La U være en $(n \times n)$-matrise over $\mathbb{C}$. Da har vi:

U er unitær

$\iff$ mhp. euklidsk indreprodukt

Kolonnene i U danner en ortonormal basis for $\mathbb{C}^n$.

BEVIS

Akkurat som over ($(-)^*$ i stedet for $(-)^T$). $\square$

FUNDAMENTALE EGENSKAPER

i) Inversen til ei unitær matrise er unitær.

ii) Et produkt av unitære matriser er unitær.

iii) Determinanten til ei unitær matrise har absoluttverdi (a.k.a. "modulus") lik 1.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

Altså ei matrise som bevarer indreproduktet

KOROLLAR II

Det finnes $\underbrace{\text{ei unitær matrise}}$ U slik at $U^{-1}AU$ blir diagonal

$$\Longleftrightarrow$$

Det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{C}^n$ som består av egenvektorer for A. $\square$

Altså matriser som bevarer indreproduktet

OPPSUMMERING

La A være ei $(n \times n)$-matrise over $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$). Det finnes ei ortogonal matrise Q (eller ei unitær matrise U) slik at $Q^{-1}AQ$ (eller $U^{-1}AU$) er diagonal

$$\iff$$

Det finnes en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ (eller for $\mathbb{C}^n$) som består av egenvektorer for A.

VIRKELIG SPØRSMÅL

Gitt en lineær operator $f : V \longrightarrow V$ på et indreproduktrom V,

når finnes det en ortonormal basis for V som består av egenvektorer for f?

PROPOSISJON I

La $f: V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V. Da har vi:

Det finnes en ortonormal basis for V som består av egenvektorer for f

$$\Longleftrightarrow$$

Det finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal

BEVIS

Samme argument som PROPOSISJON (ALTERNATIV DEFINISJON) fra FORELESNING 13V. $\square$