MA1202/6202

ANVENDELSE: FOURIER-REKKER

FORELESNING V21

GENERELT PROBLEM

Gitt kontinuerlige funksjoner $f, h_1, \ldots, h_m : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Hvilken lineærkombinasjon

$$a_1 h_1 + \ldots + a_m h_m : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

er den beste approksimasjonen til f?

TYPISK SCENARIO

På intervallet $[0, 2\pi]$ ønsker vi å bruke funksjonene

$$1 \,,\; \cos x \,,\; \cos 2x \,,\; \cos 3x \,,\; \ldots \,,\; \cos nx \,,$$
$$\sin x \,,\; \sin 2x \,,\; \sin 3x \,,\; \ldots \,,\; \sin nx \,.$$

Gitt $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, hvilke tall $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{2n} \in \mathbb{R}$ gir den beste approksimasjonen

$$f \approx \lambda_0 + \lambda_1 \cos x + \ldots + \lambda_n \cos nx + \lambda_{n+1} \sin x + \ldots + \lambda_{2n} \sin nx \; ?$$

EKSEMPEL

Hvordan kan vi etterligne $f(x) = x$ med en linearkombinasjon av funksjoner av typen

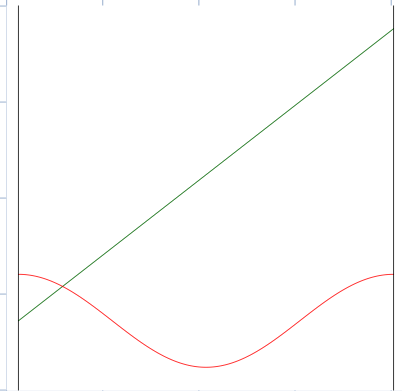
$$\cos kx \text{ og } \sin kx \; ?$$

EKSEMPEL

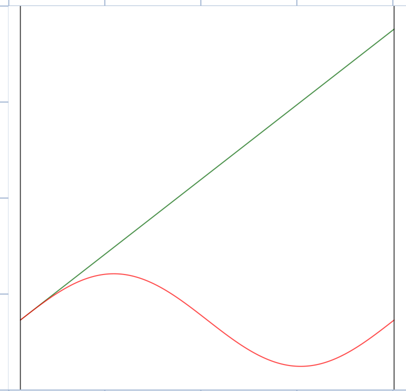
Hvordan kan vi etterligne $f(x) = x$ med en lineærkombinasjon av funksjoner av typen

$\cos kx$ og $\sin kx$?

$$f(x) = x$$



$\cos x$



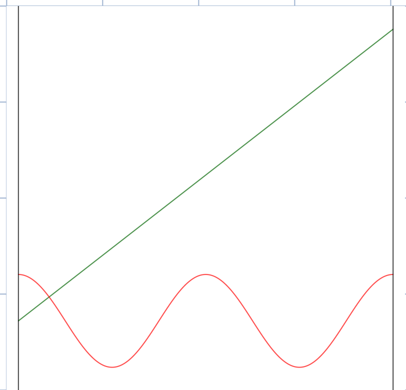
$\sin x$

EKSEMPEL

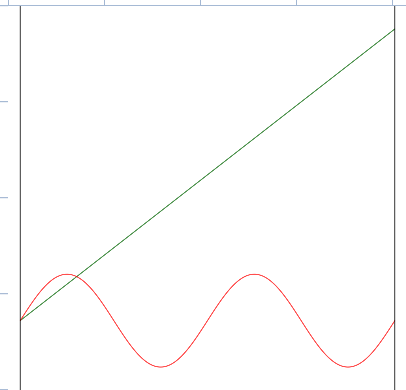
Hvordan kan vi etterligne $f(x) = x$ med en lineærkombinasjon av funksjoner av typen

$\cos kx$ og $\sin kx$?

$f(x) = x$



$\cos 2x$



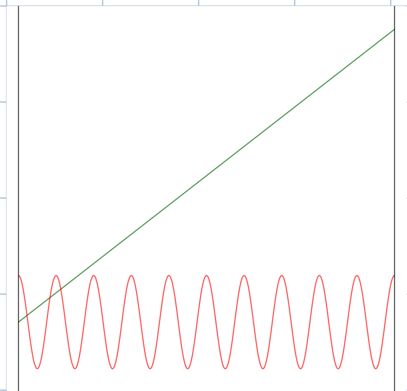
$\sin 2x$

EKSEMPEL

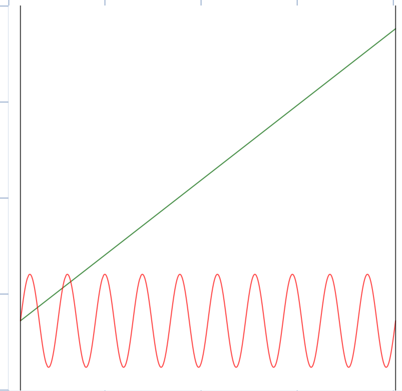
Hvordan kan vi etterligne $f(x) = x$ med en lineærkombinasjon av funksjoner av typen

$\cos kx$ og $\sin kx$?

$f(x) = x$



$\cos 10x$



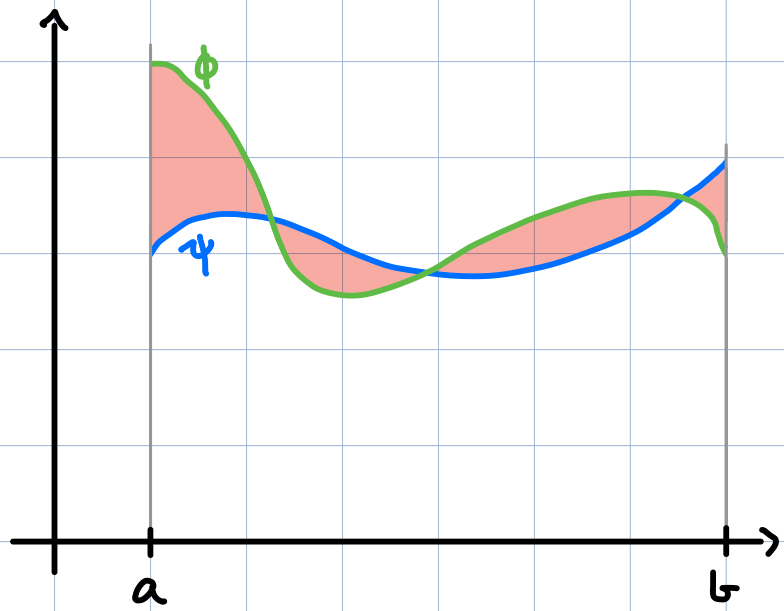
$\sin 10x$

$\square$

MINSTE KVADRATERS TILNÆRMING

FØRSTE HINDER

Hva skal "den beste approksimasjonen til f" bety? Vi trenger å definere avviket mellom to funksjoner $\phi, \psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.



$$\boxed{\int_a^b |\phi(x) - \psi(x)|\, dx}$$

Vi velger å bruke

$$\text{avvik} := \int_a^b |\phi(x) - \psi(x)|^2\, dx.$$

$$\text{avvik} := \int_a^b |\phi(x) - \psi(x)|^2 \, dx$$

OBSERVASJON

La V være indreproduktrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$\langle \phi , \psi \rangle = \int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx .$$

Da er avviket mellom ϕ og ψ gitt ved

$$\int_a^b |\phi(x) - \psi(x)|^2 \, dx = \| \phi - \psi \|^2 . \qquad \square$$

Avviket mellom ϕ og ψ er $\int_a^b |\phi(x) - \psi(x)|^2 dx = \|\phi - \psi\|^2.$

ALTSÅ

Gitt kontinuerlige funksjoner $f, h_1, \ldots, h_m : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
La $U = \mathrm{span}(h_1, \ldots, h_m) \subset V$. Den lineærkombinasjonen

$$f_{app} = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_m : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

som er den beste approksimasjonen til f
er slik at avviket mellom f og f_{app} er mindre enn avviket mellom f og enhver annen $\bar{u} \in U$.
Det vil si at

$$\| f - f_{app} \| \leq \| f - \bar{u} \| \quad \text{for hver } \bar{u} \in U.$$

Avviket mellom ϕ og ψ er $\int_a^b |\phi(x) - \psi(x)|^2 dx = \|\phi - \psi\|^2$.

ALTSÅ

Gitt kontinuerlige funksjoner $f, h_1, \ldots, h_m : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
La $U = \text{span}(h_1, \ldots, h_m) \subset V$. Den lineærkombinasjonen

$$f_{app} = a_1 h_1 + \ldots + a_n h_m : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

som er den beste approksimasjonen til f
er slik at

$$\| f - f_{app} \| \leq \| f - \bar{u} \| \quad \text{for hver } \bar{u} \in U.$$

HUSK (TEOREM fra FORELESNING E20)

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom
og la $\bar{v} \in V$. Da er

$$\| \bar{v} - P_U(\bar{v}) \| \leq \| \bar{v} - \bar{u} \| \quad \text{for hver } \bar{u} \in U,$$

og dette er en likhet hvis og bare hvis $\bar{u} = P_U(\bar{v})$.

ALTSÅ, ALTSÅ

Gitt kontinuerlige funksjoner $f, h_1, \dots, h_m : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
La $U = \text{span}(h_1, \dots, h_m) \subset V$. Den linearkombinasjonen
$f_{app} = a_1 h_1 + \dots + a_n h_m : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$
som er den beste approksimasjonen til f
er den ortogonale projeksjonen $P_U(f)$!

Fourier - rekker

La V (fortsatt) være indreproduktrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$\langle \phi , \psi \rangle = \int_a^b \phi(x)\psi(x)\,dx .$$

Nå skal vi bruke funksjonene

1 ,

$\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, $\ldots$, $\cos nx$, og

$\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\ldots$, $\sin nx$

til å approksimere en gitt $f \in V$.

La

$$\beta = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \\ \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx\} \subset V.$$

og

$$U = \operatorname{span}(\beta).$$

HUSK

- Den beste approksimasjonen til f er $P_U(f)$!
- Vi kan regne ut $P_U(f)$ hvis vi har en ortonormal basis $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ for U:

$$P_U(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n$$

Så vi ønsker oss en ortonormal basis for U!

Så vi ønsker oss en ortonormal basis for U!

KAN VISE

$\beta \,(= \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots, \cos nx,$
$\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots, \sin nx\})$

er lineært uavhengig i V.

DERMED

β er en basis for U $(= \text{span}(\beta))$. Så vi får en ortonormal basis for U hvis vi bruker GRAM – SCHMIDT - PROSESSEN på β!

Nå lar vi V være indreproduktrommet av alle kontinuerlige funksjoner $[0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ med

$$\langle \phi , \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \phi(x)\psi(x)\,dx \, .$$

OBSERVASJON

Hvis vi bruker GRAM–SCHMIDT-PROSESSEN på

$$\beta = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots, \sin nx\},$$

så får vi følgende ortonormale basis for underrommet $U = \mathrm{span}(\beta) \subset V$:

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \dots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx \right\}$$

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

Den beste approksimasjonen til f er $P_U(f)$!

KOROLLAR

La $f \in V$. Da er

$$P_U(f) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx$$

hvor

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx \quad ; \quad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx \quad (1 \leq k \leq n) ;$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx \quad (1 \leq k \leq n).$$

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

$$P_U(f) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx$$

NOTASJON

Tallene $a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ kalles **Fourier-koeffisientene til f**.

EKSEMPEL

Se på $f(x) = x$. Fourier-koeffisientene til f er

$a_0 = 2\pi$; $a_k = 0$ $(1 \leq k \leq n)$; $b_k = -\frac{2}{k}$ $(1 \leq k \leq n)$

(sjekk selv (delvis integrasjon)).

Så den lineærkombinasjonen av funksjonene

1 , $\cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$, ... , $\cos nx$,

$\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x$, ... , $\sin nx$

som er den beste approksimasjonen til f er

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \dots + a_n \cos nx + b_1 \sin x + \dots + b_n \sin nx$$

$$= \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n}\right).$$

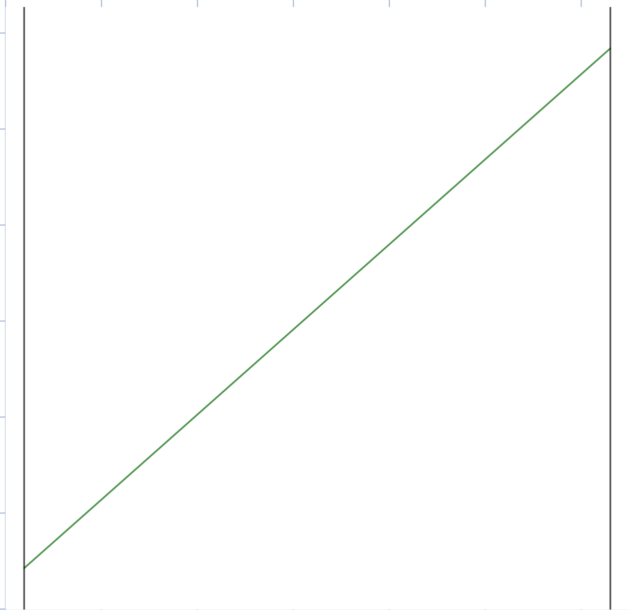
$\square$

Hvor god er tilnærmingen

$$x \approx \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n} \right) ?$$

Hvor god er tilnærmingen

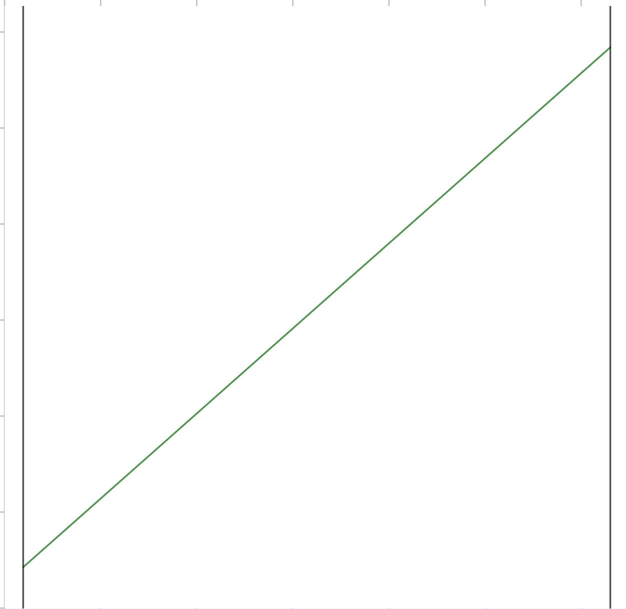
$$x \approx \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}\right) ?$$



$f(x) = x$

Hvor god er tilnærmingen

$$x \approx \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \dots + \frac{\sin nx}{n}\right) ?$$

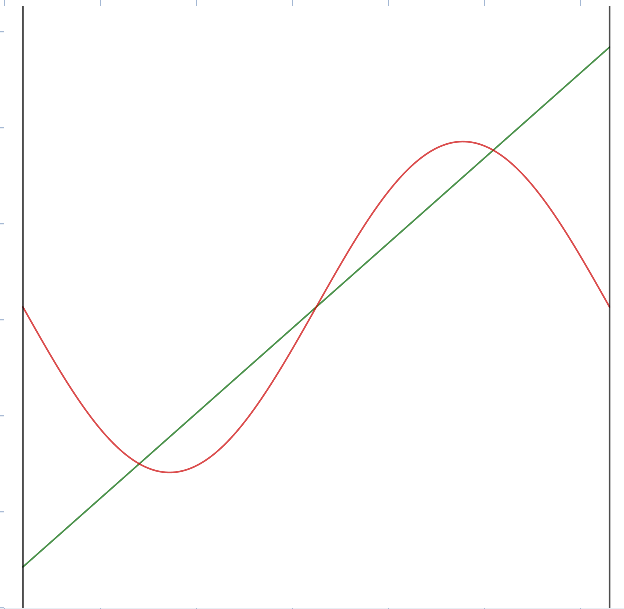


$f(x) = x$

$$\pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 10x}{10}\right)$$

Hvor god er tilnærmingen

$$x \approx \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \ldots + \frac{\sin nx}{n}\right) ?$$

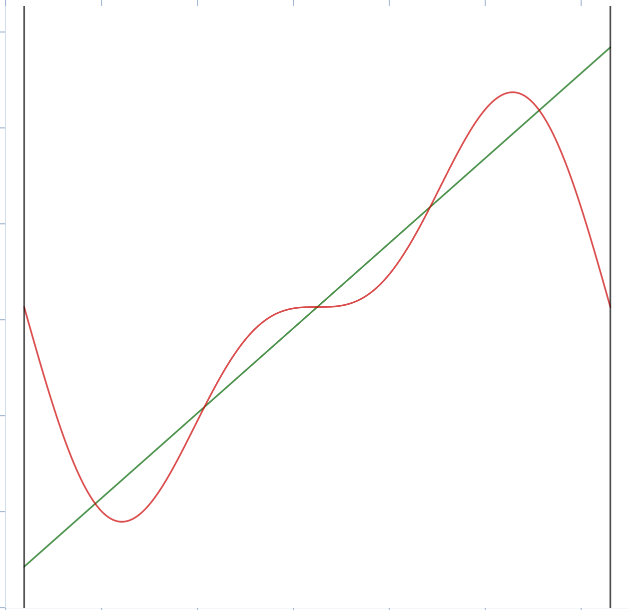


$f(x) = x$

$$\pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 10x}{10}\right)$$

Hvor god er tilnærmingen

$$x \approx \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right) ?$$

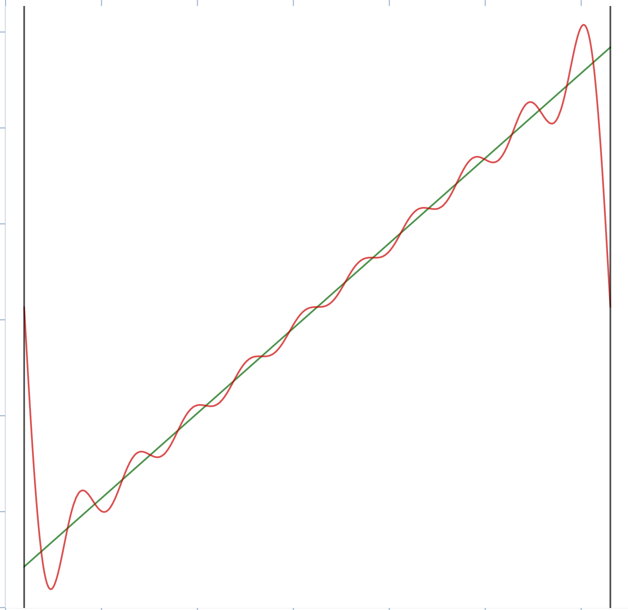


$$f(x) = x$$

$$\pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 10x}{10}\right)$$

Hvor god er tilnærmingen

$$x \approx \pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \cdots + \frac{\sin nx}{n}\right) ?$$



$f(x) = x$

$$\pi - 2\left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 4x}{4} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 6x}{6} + \frac{\sin 7x}{7} + \frac{\sin 8x}{8} + \frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 10x}{10}\right)$$

KAN VISES

Når $n \to \infty$ vil avviket $\|f - P_U(f)\|^2$ gå mot null.

Dette kan vi uttrykke som

$$f(x) \overset{(*)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right).$$

DEFINISJON

Høyresida av (*) kalles Fourier-rekka til f på intervallet $[0, 2\pi]$.