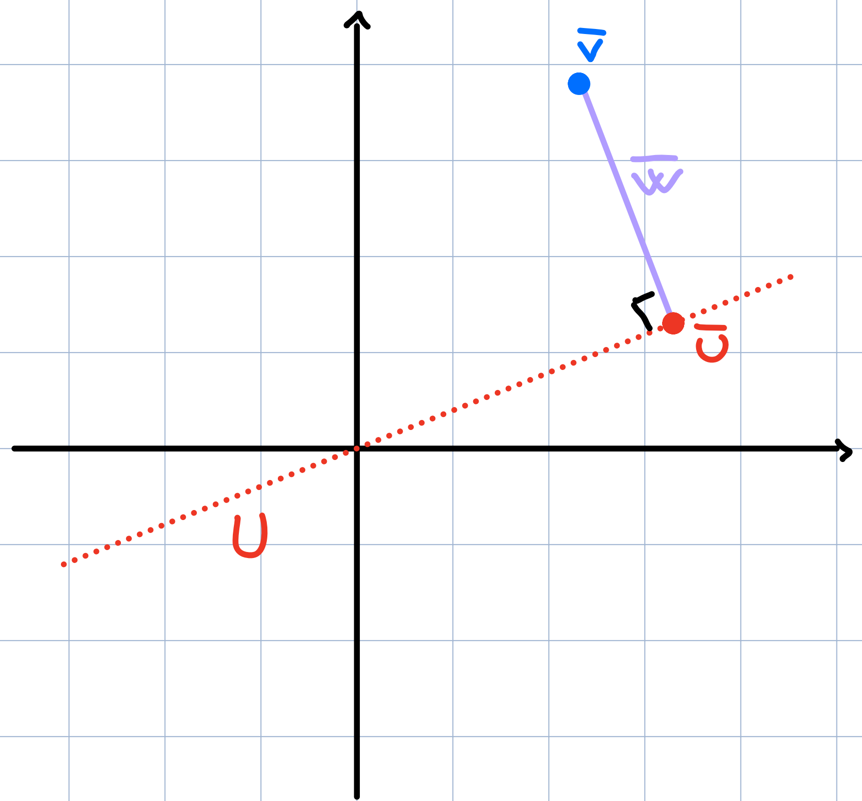
MA1202/6202

ORTOGONAL PROJEKSJON

FORELESNING V20



ORTOGONAL DEKOMPONERING

La U være et 1-dimensjonalt underrom.

For hver $\bar{v}$ har vi

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$$

hvor $\bar{u} \in U$

og $\bar{w}$ er ortogonal med hver vektor i U.

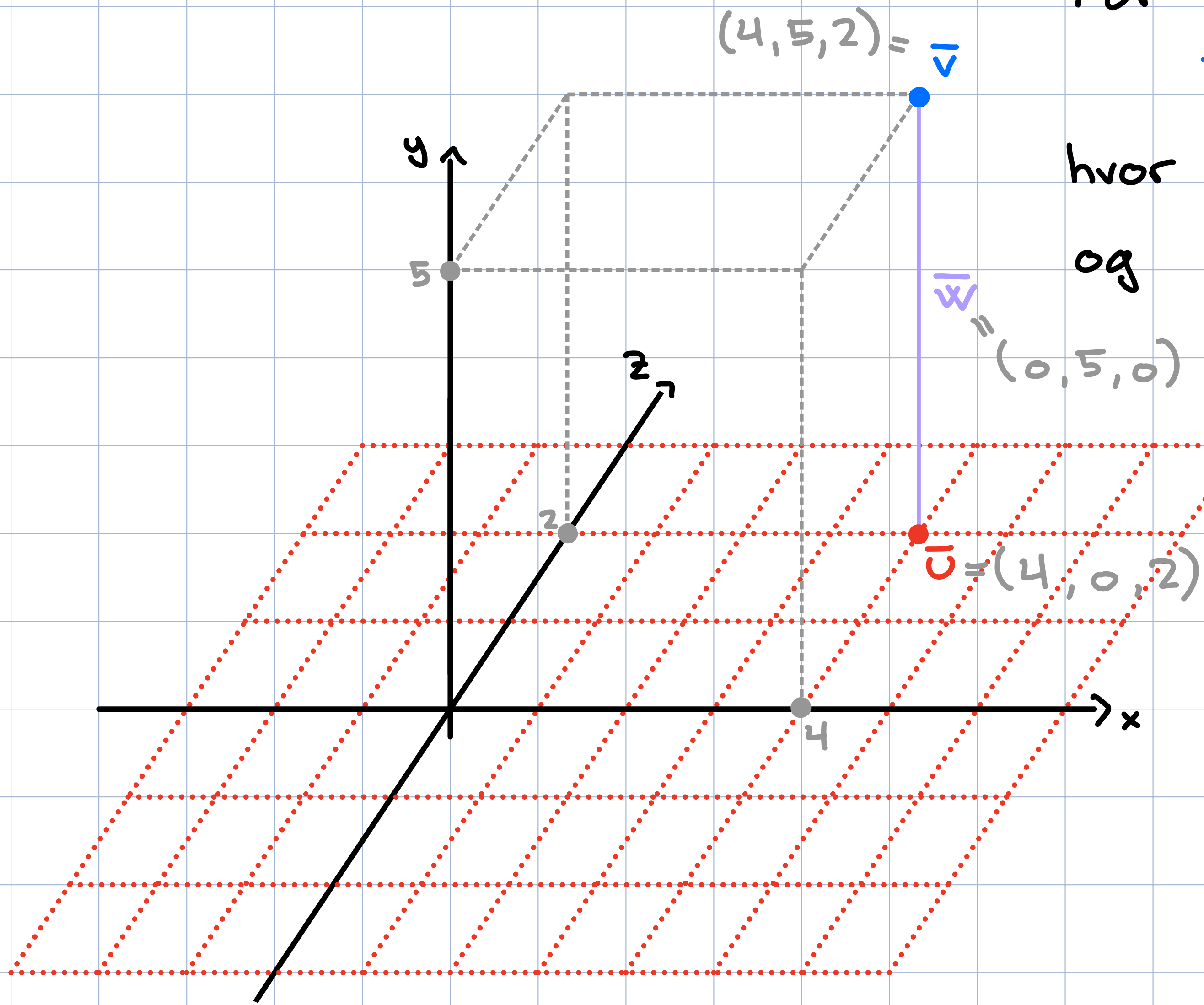
La U være et 2-dimensjonalt underrom.

For hver $\bar{v}$ har vi

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$$

hvor $\bar{u} \in U$

og $\bar{w}$ er ortogonal med hver vektor i U.



La V være et indreproduktrom.

DEFINISJON

La $U \subset V$ være en delmengde. Det ortogonale komplementet til U er

$$U^{\perp} = \{ \bar{v} \in V \mid \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \; \bar{u} \in U \}$$

DEFINISJON

La $U \subset V$ være en delmengde. Det **ortogonale komplementet** til U er

$$U^{\perp} = \{ \bar{v} \in V \mid \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \; \bar{u} \in U \}$$

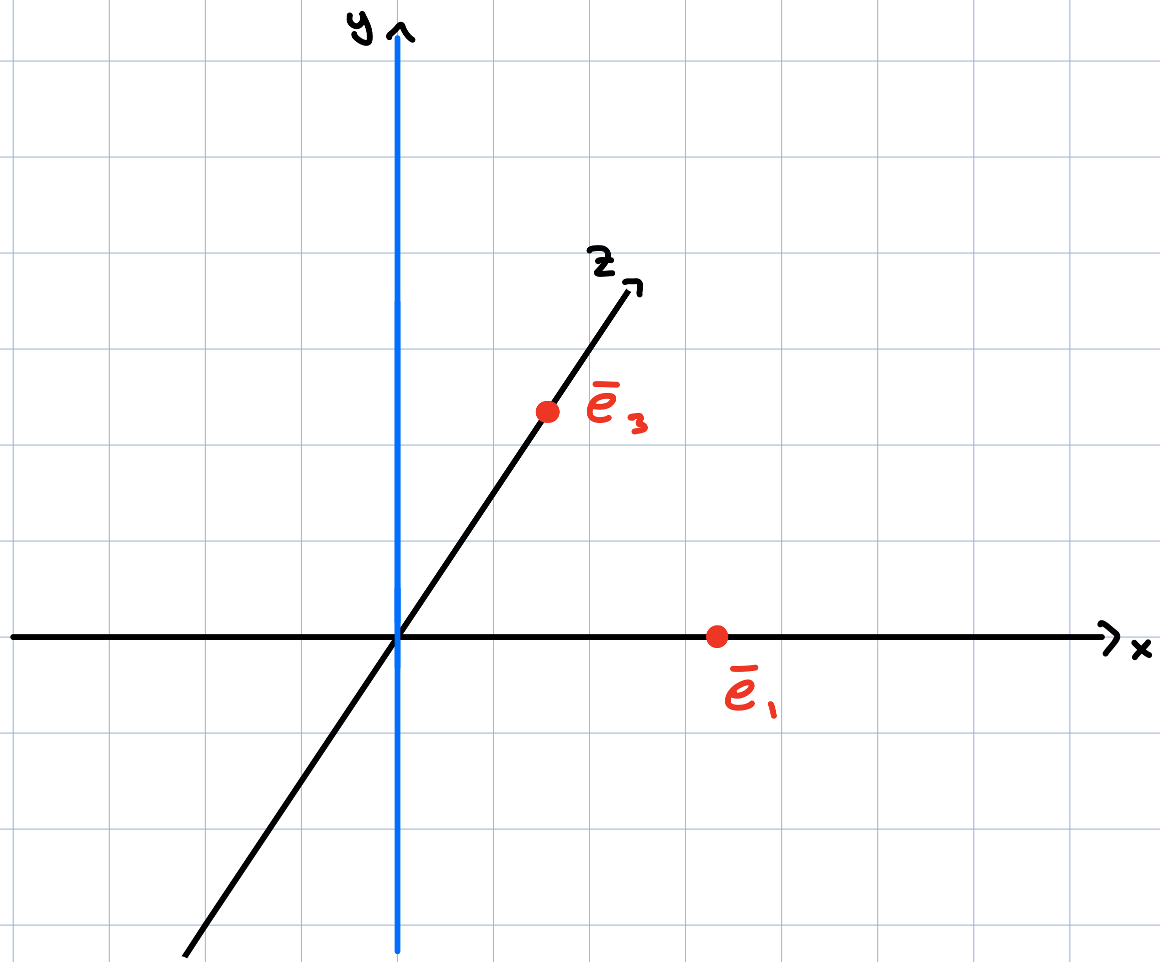
EKSEMPEL

La

$$U = \{ \bar{e}_1 , \bar{e}_3 \}$$

Da er

$$U^{\perp} = \{ (0,y,0) \mid y \in \mathbb{R} \}$$



DEFINISJON

La $U \subset V$ være en delmengde. Det **ortogonale komplementet** til U er

$$U^{\perp} = \{ \bar{v} \in V \mid \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \ \bar{u} \in U \}$$

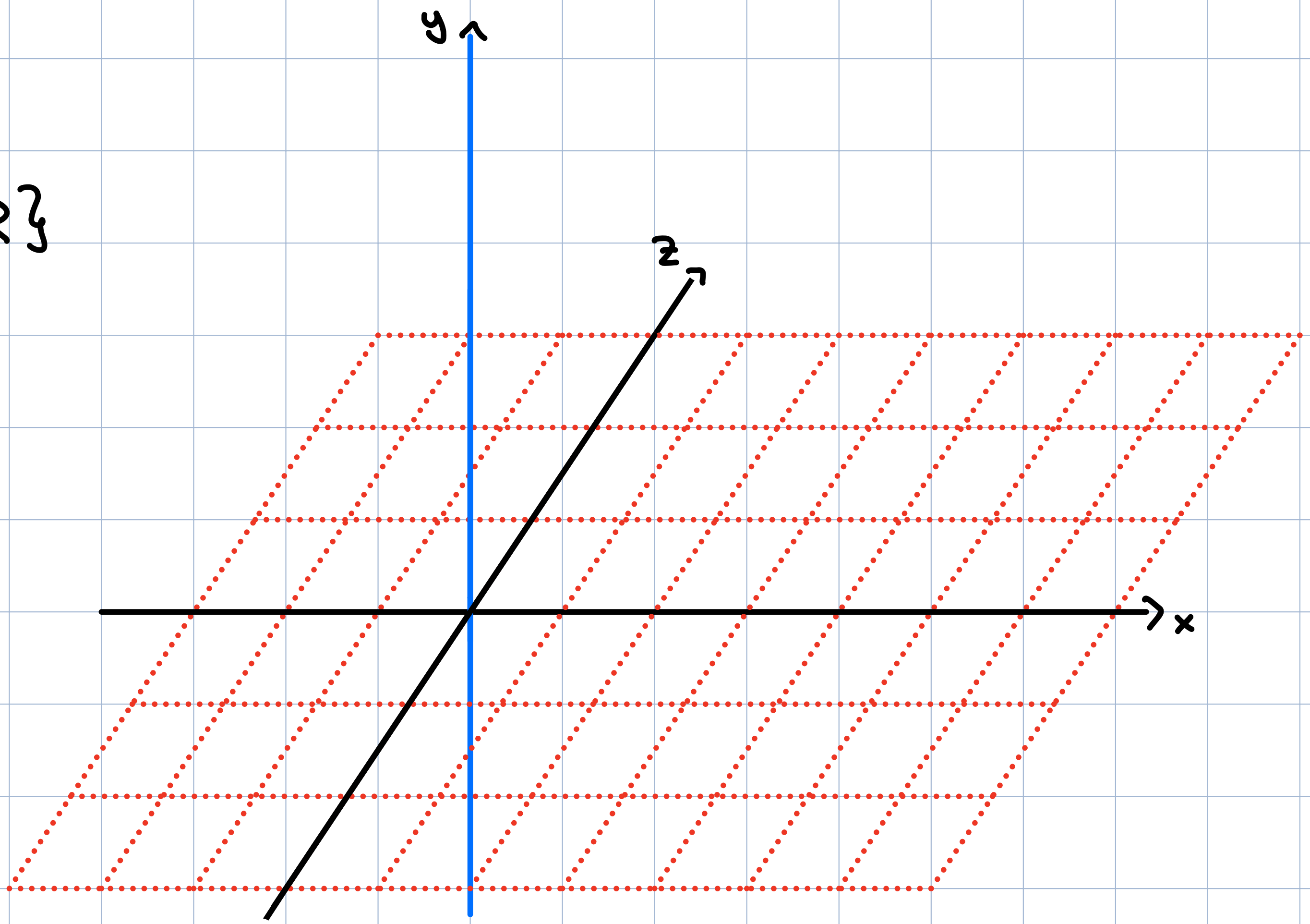
EKSEMPEL

La

$$U = \{ (x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R} \}$$

Da er

$$U^{\perp} = \{ (0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R} \}$$



DEFINISJON

La $U \subset V$ være en delmengde. Det **ortogonale komplementet** til U er

$$U^{\perp} = \{ \bar{v} \in V \mid \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 \quad \forall \ \bar{u} \in U \}$$

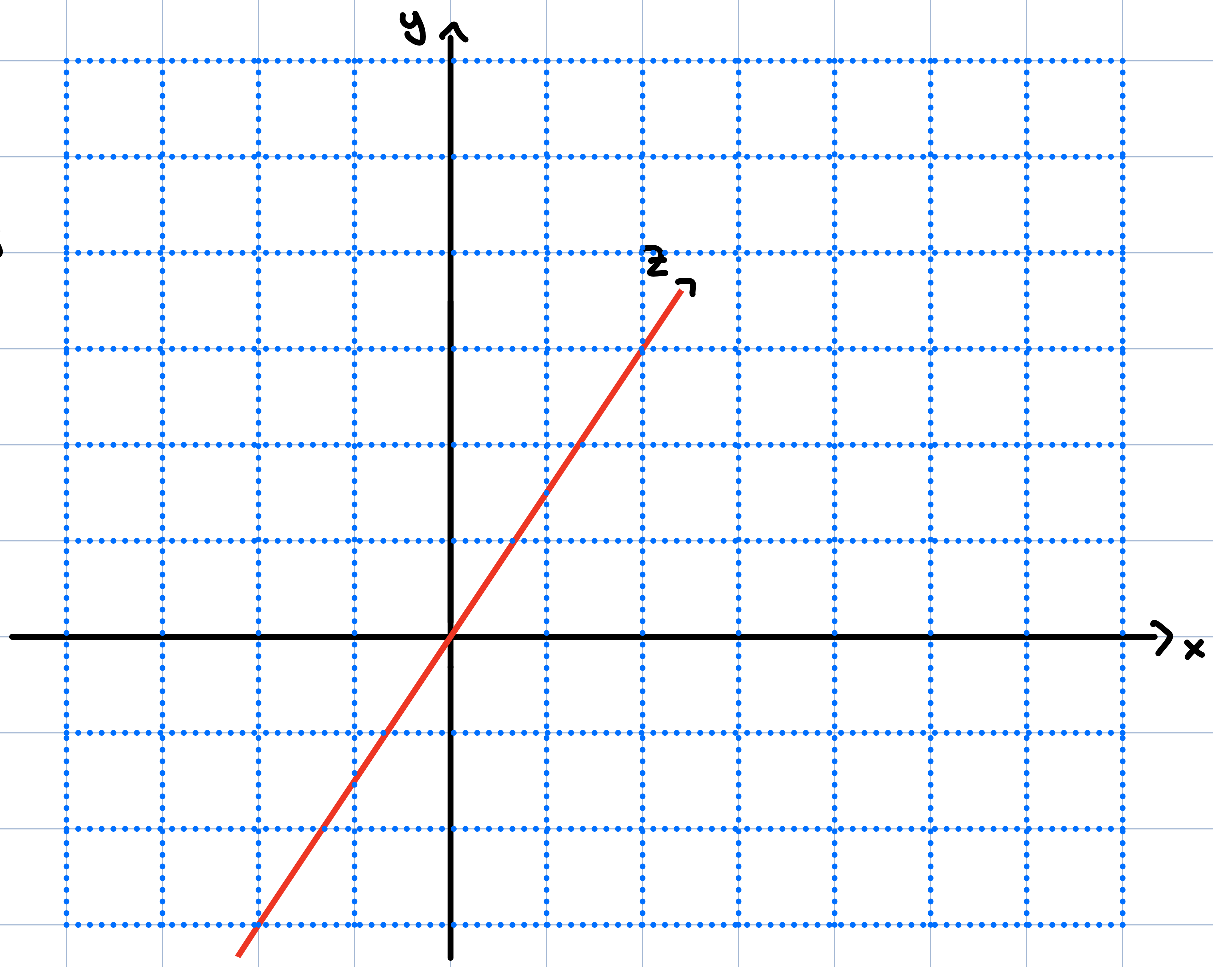
EKSEMPEL

La

$$U = \{ (0,0,z) \mid z \in \mathbb{R} \}$$

Da er

$$U^{\perp} = \{ (x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R} \}$$



FUNDAMENTALE EGENSKAPER

La U, W være delmengder av V. Da har vi:

i) $U^\perp = (\text{span}(U))^\perp$ er et underrom av V

ii) $U \cap U^\perp = \{\bar{0}\}$

iii) $U \subset W \Rightarrow W^\perp \subset U^\perp$

Bevises i S.20

Vi har også:

iv) $\{\bar{0}\}^\perp = V$

v) $V^\perp = \{\bar{0}\}$

$\square$

TEOREM (ORTOGONAL PROJEKSJON)

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom.
Da kan hver vektor $\bar{v} \in V$ skrives som en sum

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med} \quad \bar{u} \in U \quad \text{og} \quad \bar{w} \in U^{\perp}$$

på en entydig måte.

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Da kan hver vektor $\bar{v} \in V$ skrives som en sum $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in U^{\perp}$ på en entydig måte.

BEVIS

La $\bar{v} \in V$.

Eksistens av $\bar{u}$ og $\bar{w}$: La $\{\bar{e}_1, \ldots, e_n\}$ være en ortonormal basis for U (finnes ved KOROLLAR fra FORELESNING V18). La

$$\bar{u} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \ldots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n \quad \text{og}$$

$$\bar{w} = \bar{v} - \bar{u}.$$

Da er $\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ og $\bar{u} \in U$ $(= \mathrm{span}(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n))$.

Det gjenstår for oss å vise at $\bar{w} \in U^{\perp}$.

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom.
Da kan hver vektor $\bar{v} \in V$ skrives som en sum
$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w}$ med $\bar{u} \in U$ og $\bar{w} \in U^\perp$
på en entydig måte.

BEVIS

La $\bar{v} \in V$.

Eksistens av $\bar{u}$ og $\bar{w}$:

Det gjenstår for oss å vise at $\bar{w} \in U^\perp$. Siden $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ er ortonormal, blir

$$\langle \bar{w}, \bar{e}_i \rangle = \langle \bar{v} - \bar{u}, e_i \rangle$$
$$= \langle \bar{v} - \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n, \bar{e}_i \rangle$$

$\{\bar{e}_1, \dots, e_n\}$ er ortonormal

$$= \langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle - \langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle = 0$$

Dermed er $\bar{w} \in \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}^\perp = (\text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n))^\perp = U^\perp$.

Dette etablerer eksistens.

Vis dette selv!

La $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom. Da kan hver vektor $\bar{v} \in V$ skrives som en sum

$$\bar{v} = \bar{u} + \bar{w} \quad \text{med} \quad \bar{u} \in U \quad \text{og} \quad \bar{w} \in U^{\perp}$$

på en entydig måte.

BEVIS

La $\bar{v} \in V$.

Entydighet av $\bar{u}$ og $\bar{w}$: Anta at $\bar{u}_2 + \bar{w}_2 = \bar{v} = \bar{u}_1 + \bar{w}_1$ med $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$ og $\bar{w}_1, \bar{w}_2 \in U^{\perp}$. Da er

FUNDAMENTAL EGENSKAP ii)

$$\underbrace{\bar{u}_1 - \bar{u}_2}_{\in U} \overset{(*)}{=} \underbrace{\bar{w}_2 - \bar{w}_1}_{\in U^{\perp}}.$$

Siden $U \cap U^{\perp} = \{\bar{0}\}$, impliserer $(*)$ at

$$\bar{u}_1 - \bar{u}_2 = \bar{0} = \bar{w}_2 - \bar{w}_1,$$

altså $\bar{u}_1 = \bar{u}_2$ og $\bar{w}_1 = \bar{w}_2$. Dette etablerer entydighet. $\square$