MA1202/6202

FUNKSJONALER

FORELESNING V19

Husk: Nå er $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ eller $\mathbb{F} = \mathbb{R}$

DEFINISJON

En **lineær funksjonal** på V er en **lineærtransformasjon fra V til F**.

HUSK (FUNDAMENTALE EGENSKAPER, FORELESNING V17)

Fiksér en vektor $\bar{v} \in V$. Da er

$$\begin{cases} \langle -, \bar{v} \rangle : V \longrightarrow F \\ \qquad\qquad\quad \bar{x} \longmapsto \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle \end{cases}$$

en lineær funksjonal.

VI SKAL VISE

Det finnes ingen andre eksempler!

(Så lenge V er endeligdimensjonalt.)

VI SKAL VISE

Hver funksjonal er på formen $\langle - , \bar{v} \rangle$!

EKSEMPEL

Med euklidsk indreprodukt

La $\phi : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}$ være gitt ved

$$\phi(z_1, z_2, z_3) = 2z_1 - 5z_2 + z_3 .$$

Da er ϕ en lineær funksjonal på $\mathbb{C}^3$.

Vi har påstått at det finnes en $\bar{v} \in \mathbb{C}^3$ slik at

$$\phi = \langle - , \bar{v} \rangle.$$

Dette ser faktisk ut til å holde: La $\bar{v} = (2, -5, 1)$.

For hver $\bar{z} = (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$ får vi da

$$\begin{aligned}\langle - , \bar{v} \rangle (\bar{z}) &= \langle \bar{z}, \bar{v} \rangle \\ &= \langle (z_1, z_2, z_3), (2, -5, 1) \rangle \\ &= 2z_1 - 5z_2 + z_3 = \phi(\bar{z}).\end{aligned}$$

$\square$

VI SKAL VISE

Hver funksjonal er på formen $\langle - , \bar{v} \rangle$!

EKSEMPEL

Se på indreproduktrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx$.

Vi har en lineær funksjonal $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$\phi(p) = \int_{-1}^{1} p(x) \cos(\pi x)\, dx.$$

Vi har påstått at det finnes en $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ slik at

$$\int_{-1}^{1} p(x) \cos(\pi x)\, dx = \phi(p) = \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx \quad \forall p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

(Vi kan IKKE velge $q = \cos(\pi x)$!)

TEOREM !

La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la $\phi : V \longrightarrow F$ være en lineær funksjonal. Da finnes en entydig vektor $\bar{v} \in V$ slik at

$$\phi(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad \text{for hver} \quad \bar{u} \in V.$$

BEVIS

Eksistens: La $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n$ være en ortonormal basis for V (KOROLLAR fra FORELESNING V18). For hver $\bar{u} \in V$ er

$$\phi(\bar{u}) = \phi(\langle \bar{u}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \dots + \langle \bar{u}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n)$$

TEOREM(!) fra FORELESNING V18

$$= \phi(\langle \bar{u}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1) + \dots + \phi(\langle \bar{u}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n)$$

ϕ lineær

$$= \langle \bar{u}, \bar{e}_1 \rangle \phi(\bar{e}_1) + \dots + \langle \bar{u}, \bar{e}_n \rangle \phi(\bar{e}_n)$$

$$= \phi(\bar{e}_1) \langle \bar{u}, \bar{e}_1 \rangle + \dots + \phi(\bar{e}_n) \langle \bar{u}, \bar{e}_n \rangle$$

FUNDAMENTAL EGENSKAP iv)

$$= \langle \bar{u}, \overline{\phi(\bar{e}_1)}\, \bar{e}_1 \rangle + \dots + \langle \bar{u}, \overline{\phi(\bar{e}_n)}\, \bar{e}_n \rangle$$

Konjugering i $\mathbb{C}$

FUNDAMENTAL EGENSKAP iii)

$$= \langle \bar{u}, \overline{\phi(\bar{e}_1)}\, \bar{e}_1 + \dots + \overline{\phi(\bar{e}_n)}\, \bar{e}_n \rangle.$$

TEOREM!

La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la $\phi : V \longrightarrow F$ være en lineær funksjonal. Da finnes en entydig vektor $\bar{v} \in V$ slik at

$$\phi(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad \text{for hver} \quad \bar{u} \in V.$$

BEVIS

Eksistens:

Har nå sett: $\phi(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \overline{\phi(\bar{e}_1)}\, \bar{e}_1 + \ldots + \overline{\phi(\bar{e}_n)}\, \bar{e}_n \rangle$

Altså, ved å velge

Konjugering i $\mathbb{C}$

$$\bar{v} = \overline{\phi(\bar{e}_1)}\, \bar{e}_1 + \ldots + \overline{\phi(\bar{e}_n)}\, \bar{e}_n$$

får vi:

$$\phi(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad \text{for hver} \quad \bar{u} \in V.$$

Dette etablerer eksistens.

TEOREM!

La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la $\phi : V \longrightarrow F$ være en lineær funksjonal. Da finnes en entydig vektor $\bar{v} \in V$ slik at

$$\phi(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle \quad \text{for hver} \quad \bar{u} \in V.$$

BEVIS

Entydighet: Anta at $\langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle = \phi(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle$ for hver $\bar{u} \in V$. Da blir

$$(*) \qquad 0 = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 \rangle - \langle \bar{u}, \bar{v}_2 \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v}_1 - \bar{v}_2 \rangle \quad \forall \; \bar{u} \in V.$$

Spesielt må $(*)$ holde for $\bar{u} = \bar{v}_1 - \bar{v}_2$, så

$$0 = \langle \bar{v}_1 - \bar{v}_2 , \bar{v}_1 - \bar{v}_2 \rangle.$$

Da gir indreproduktsaksiom ii) at $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{0}$, i.e. $\bar{v}_1 = \bar{v}_2$

Dette viser at vektoren $\bar{v}$ er entydig. $\square$

MERK

Beviset for vårt TEOREM var konstruktivt !

Altså, gitt en lineær funksjonal $\phi : V \longrightarrow F$ så forteller beviset oss hvordan vi kan konstruere en vektor $\bar{v} \in V$ slik at

$$\phi = \langle - , \bar{v} \rangle$$

Konjugering i $\mathbb{C}$

(nemlig $\bar{v} = \overline{\phi(\bar{e}_1)}\, \bar{e}_1 + \ldots + \overline{\phi(\bar{e}_n)}\, \bar{e}_n$ for en hvilken som helst (!) ortonormal basis $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ for V).

EKSEMPEL (GJENOPPTATT)

Se på indreproduktrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx$.

Vi har en lineær funksjonal $\phi : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$\phi(p) = \int_{-1}^{1} p(x) \cos(\pi x)\, dx .$$

Vårt TEOREM! sier at det finnes en $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ slik at

$$\int_{-1}^{1} p(x) \cos(\pi x)\, dx = \phi(p) = \langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx \quad \forall p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} .$$

(Vi kan fortsatt IKKE velge $q = \cos(\pi x)$!)

Beviset for vårt TEOREM forteller oss hvordan vi finner dette polynomet q !

EKSEMPEL (GJENOPPTATT, FORTS.)

Beviset for vårt TEOREM forteller oss hvordan vi finner et polynom $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ slik at

$$\int_{-1}^{1} p(x)\cos(\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx \qquad \forall p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}!$$

Husk (EKSEMPEL fra FORELESNING V18) at

$$\left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}}}_{=\bar{e}_1},\ \underbrace{\sqrt{\frac{3}{2}}\,x}_{=\bar{e}_2},\ \underbrace{\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)}_{=\bar{e}_3} \right\}$$

er en ortonormal basis for dette indreproduktrommet. Da vet vi at polynomet q er gitt ved

$$q = \phi(\bar{e}_1)\bar{e}_1 + \phi(\bar{e}_2)\bar{e}_2 + \phi(\bar{e}_3)\bar{e}_3 \overset{\text{Litt regning}}{=} \ldots = -\frac{45}{2\pi^2}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$$

$\square$