ORTONORMAL BASIS OG GRAM-SCHMIDT

FORELESNING V18

MOTIVASJON

La $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ være en basis for et vektorrom V over F

For hver $\bar{v} \in V$ finnes entydige skalarer $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$ slik at

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n .$$

MEN DET KAN VÆRE VANSKELIG Å **FAKTISK FINNE** $a_1, a_2, \dots, a_n$

La V være et indreproduktrom.

ORTONORMAL BASIS

DEFINISJON

En mengde vektorer i V er ortogonal hvis hver av vektorene er ortogonal til alle de andre vektorene i mengden.
Hvis hver vektor i mengden i tillegg har norm lik 1, så kalles mengden ortonormal.

EKSEMPEL

Med euklidsk indreprodukt!

I $\mathbb{R}^3$ er de følgende mengdene ortonormale.

- standardbasisen
- $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)\}$
- $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$

PROPOSISJON

La $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\} \subset V$ være en ortonormal mengde. Da har vi:

$\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$

i) For alle skalarer $a_1, \dots, a_n \in F$ er

$$\|a_1\bar{e}_1 + \dots + a_n\bar{e}_n\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2.$$

ii) $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ er lineært uavhengig i V.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

DEFINISJON

En ortonormal basis for V er en basis for V som også er en ortonormal mengde.

EKSEMPEL

De følgende delmengdene er ortonormale basiser for $\mathbb{R}^3$ (med euklidsk indreprodukt).

- standardbasisen
- $\{(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6})\}$

MOTIVASJON

$\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ basis for V og $\bar{v} \in V$

$\Rightarrow \exists!\ a_1, \dots, a_n \in F$ slik at $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$

MEN DET KAN VÆRE VANSKELIG Å FAKTISK FINNE $a_1, \dots, a_n$

TEOREM (!)

La $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ være en ortonormal basis for V.
For hver $\bar{v} \in V$ er da

$$\bar{v} = \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n$$

og

$$\|\bar{v}\|^2 = |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + |\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle|^2 + \dots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2 .$$

$\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ ortonormal basis for V og $\bar{v} \in V$

$$\Rightarrow \quad \bar{v} \overset{(*)}{=} \langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 + \langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 + \dots + \langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle \bar{e}_n$$

og

$$\|\bar{v}\|^2 \overset{(**)}{=} |\langle \bar{v}, \bar{e}_1 \rangle|^2 + |\langle \bar{v}, \bar{e}_2 \rangle|^2 + \dots + |\langle \bar{v}, \bar{e}_n \rangle|^2 .$$

BEVIS

Siden $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ er en basis, finnes $a_1, \dots, a_n \in F$ slik at

$$\bar{v} \overset{(*)}{=} a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n$$

For hver $1 \leq i \leq n$ gir $(*)$ at

$$\boxed{\langle \bar{v}, \bar{e}_i \rangle} = \langle a_1 \bar{e}_1 + \dots + a_n \bar{e}_n, \bar{e}_i \rangle$$
$$= a_1 \langle \bar{e}_1, \bar{e}_i \rangle + \dots + a_n \langle \bar{e}_n, \bar{e}_i \rangle$$
$$= a_i \langle \bar{e}_i, \bar{e}_i \rangle \boxed{= a_i} .$$

Dette viser at $(*)$ holder. Nå følger $(**)$ fra $(*)$ og PROPOSISJON i) fra over. $\square$

OBSERVASJON

Anta at $\dim V = n < \infty$. Enhver ortonormal mengde i V med n elementer, er en ortonormal basis for V.

BEVIS

Hvis $\beta = \{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ er en ortonal mengde, så er β lineært uavhengig i følge PROPOSISJON ii) fra over. Dermed er β en (ortonormal) basis i følge PROPOSISJON II i) fra FORELESNING V4. $\square$

GRAM-SCHMIDT

Teorem (Gram–Schmidt-prosessen)

La $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ være lineært uavhengig i V.
La

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$$

og for hver $2 \leq i \leq n$ la

$$\bar{e}_i = \frac{\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \ldots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}}{\|\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \ldots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}\|}.$$

Da har vi:

i) $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ er en ortonormal mengde i V.

ii) $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n) = \operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$.

KOROLLAR

Hvis V er endeligdimensjonalt, så har vi:

i) Det finnes en ortonormal basis for V.

ii) Enhver ortonormal mengde i V kan utvides til en ortonormal basis for V.

BEVIS i)

Det finnes en basis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ for V (TEOREM(!) fra FORELESNING V4). Hvis vi bruker GRAM – SCHMIDT - PROSESSEN på β, så får vi en ortonormal mengde $\beta' = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ med $\mathrm{span}(\beta') = \mathrm{span}(\beta) = V$, i.e. β' er en ortonormal basis for V.

KOROLLAR

Hvis V er endeligdimensjonalt, så har vi:

i) Det finnes en ortonormal basis for V.

ii) Enhver ortonormal mengde i V kan utvides til en ortonormal basis for V.

BEVIS ii)

Hvis $\alpha \subset V$ er ortonormal, så er α lineart uavhengig (PROPOSISJON ii) fra over). Da kan α utvides til en basis α' for V (PROPOSISJON I ii) fra FORELESNING V4). Hvis vi bruker GRAM-SCHMIDT-PROSESSEN på α' så får vi en ortonormal basis for V som inneholder α (hvorfor?). $\square$

EKSEMPEL

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ er et indreproduktrom med

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\,q(x)\,dx \qquad \forall \; p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

og $\beta = \{ \overset{\bar{v}_1 =}{1}, \overset{\bar{v}_2 =}{x}, \overset{\bar{v}_3 =}{x^2} \}$ er en basis.

La oss bruke GRAM–SCHMIDT-PROSESSEN på β:

- $\bar{e}_1 = \dfrac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}$ og $\|\bar{v}_1\|^2 = \displaystyle\int_{-1}^{1} dx = 2$

$$\Rightarrow \bar{e}_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

EKSEMPEL (FORTS.)

$$\bar{e}_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\bar{e}_2 = \frac{\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1}{\| \bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 \|}$$

Her er

$$\bar{v}_2 - \langle \bar{v}_2, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 = x - \langle x, 1/\sqrt{2} \rangle 1/\sqrt{2}$$

$$= x - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x \, dx = x$$

og $\|x\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 \, dx = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \bar{e}_2 = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\, x}$$

EKSEMPEL (FORTS.)

$$\bar{e}_1 = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}, \quad \bar{e}_2 = \boxed{\sqrt{\frac{3}{2}}\, x}$$

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{v}_3 - \langle \bar{v}_3, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \langle \bar{v}_3, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2}{\| \bar{v}_3 - \langle \bar{v}_3, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \langle \bar{v}_3, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2 \|}$$

Her er

$$\bar{v}_3 - \langle \bar{v}_3, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \langle \bar{v}_3, \bar{e}_2 \rangle \bar{e}_2$$

$$= x^2 - \langle x^2, \sqrt{1/2} \rangle \sqrt{1/2} - \langle x^2, \sqrt{3/2}\, x \rangle \sqrt{3/2}\, x$$

$$= x^2 - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^2\, dx - \frac{3}{2} \int_{-1}^{1} x^3\, dx = x^2 - 1/3$$

og

$$\| x^2 - 1/3 \|^2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1/3)(x^2 - 1/3)\, dx = \ldots = 8/45$$

$$\Rightarrow \bar{e}_3 = \boxed{\sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right)}$$

EKSEMPEL (FORTS.)

Altså er

$$\left\{ \underset{\overline{e}_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}},\ \underset{\overline{e}_2}{\sqrt{\frac{3}{2}}\,x},\ \underset{\overline{e}_3}{\sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2-\frac{1}{3}\right)} \right\}$$

en ortonormal basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med dette indreproduktet. $\square$

ADVARSEL

Hva skjer hvis vi prøver å bruke GRAM–SCHMIDT-PROSESSEN på en lineært avhengig mengde?

(Kommer som samarbeidsoppgave.)

BEVIS:
GRAM-SCHMIDT

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}, \quad \bar{e}_i = \frac{\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}}{\| \bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1} \|}$$

BEVIS

Vi bruker induksjon på i.

Tilfellet $i = 1$ er ok.

Anta nå at $1 < i < n$ og at

(*) $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1}$ er en ortonormal mengde og

(**) $\text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1}) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1})$.

Merk at $\bar{v}_i \notin \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{i-1}) \overset{(*)}{=} \text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_{i-1})$, så vi deler ikke på null i definisjonen av $\bar{e}_i$.
Det er også klart at $\|\bar{e}_i\| = 1$.

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}, \quad \bar{e}_i = \frac{\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}}{\|\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}\|}$$

BEVIS

For hver $1 \leq k < i$ er

$$\langle \bar{e}_i, \bar{e}_k \rangle = \left\langle \frac{\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}}{\|\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}\|}, \bar{e}_k \right\rangle$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\langle \bar{v}_i, \bar{e}_k \rangle - \langle v_i, \bar{e}_k \rangle}{\|\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}\|} = 0,$$

så i) holder.

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{v}_1}{\|\bar{v}_1\|}, \quad \bar{e}_i = \frac{\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}}{\|\bar{v}_i - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_1 \rangle \bar{e}_1 - \dots - \langle \bar{v}_i, \bar{e}_{i-1} \rangle \bar{e}_{i-1}\|}$$

BEVIS

Fra definisjonen av $\bar{e}_i$ er det klart at

$\bar{v}_i \in \text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i)$.

Sammen med $(**)$ gir dette at

$$A = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i) \subset \text{span}(\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i) = B$$

Vi har at

- $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_i$ er lineært uavhengig (antagelse) og
- $\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_i$ er lineært uavhengig (PROPOSISJON ii) over).

Derfor er A og B begge underrom av V av dimensjon i. Det betyr at $A = B$ (S4.6), så også ii) holder. $\square$