MA1202/6202

INDREPRODUKT, NORM OG ORTOGONALITET

FORELESNING V17

Fra nå er $F = \mathbb{C}$ eller $F = \mathbb{R}$

HUSK

Det **kartesiske produktet** av to mengder A og B er

$$A \times B = \{ \underbrace{(x, y)}_{\text{"ordna par"}} \mid x \in A, \ y \in B \}.$$

EKSEMPEL

Hvis

$$A = \{1, 2, 3\} \quad \text{og} \quad B = \{4, 5, 6\},$$

så blir

$$\begin{aligned} A \times B = \{ &(1,4), (1,5), (1,6), \\ &(2,4), (2,5), (2,6), \\ &(3,4), (3,5), (3,6) \}. \end{aligned}$$

$\square$

HUSK

Det kartesiske produktet av to mengder A og B er

$$A \times B = \{ \underbrace{(x, y)}_{\text{"ordna par"}} \mid x \in A, \; y \in B \}.$$

EKSEMPEL

Det kartesiske produktet av $\mathbb{R}$ med $\mathbb{R}$ er

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{ (x, y) \mid x \in \mathbb{R}, \; y \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (x, y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$$
$$= \mathbb{R}^2$$

altså det reelle planet. $\square$

HUSK

Det kartesiske produktet av to mengder A og B er

$$A \times B = \{ \underbrace{(x, y)}_{\text{"ordna par"}} \mid x \in A , y \in B \}.$$

EKSEMPEL

Se på $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}^4$. Skalarmultiplikasjonen er en funksjon fra det kartesiske produktet $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^4$ til $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (a, \vec{v}) \longmapsto \underbrace{a\vec{v}}_{\text{vektor}} \end{cases}$$

skalar vektor

E.g. $(2, (1,3,1,4)) \longmapsto 2(1,3,1,4) = (2,6,2,8)$. $\square$

For hvert vektorrom V over F:

vektor + vektor = vektor

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto \bar{u} + \bar{v}$$

skalar · vektor = vektor

$$F \times V \longrightarrow V$$
$$(a, \bar{v}) \longmapsto a\bar{v}$$

HUSK FRA MA1201

"Prikkproduktet" av to vektorer

$\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n),\ \bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$

er

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n \in \mathbb{R}.$$

Prikkproduktet lot oss snakke om

- norm $\left(\|\bar{v}\| = \sqrt{\bar{v} \cdot \bar{v}} \right)$ og avstand $\left(d(\bar{u}, \bar{v}) = \|\bar{u} - \bar{v}\| \right)$
- ortogonalitet $\left(\bar{u} \perp \bar{v} \iff \bar{u} \cdot \bar{v} = 0 \right)$

VÅRT MÅL

Finne aksiomer for $\overbrace{\text{"generalisert prikkprodukt"}}^{=\text{"indreprodukt"}}$ slik at vi kan snakke om norm, avstand og ortogonalitet i flere vektorrom enn $\mathbb{R}^n$!

For hvert vektorrom V over F:

vektor + vektor = vektor

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto \bar{u} + \bar{v}$$

skalar · vektor = vektor

$$F \times V \longrightarrow V$$
$$(a, \bar{v}) \longmapsto a\bar{v}$$

For $V = \mathbb{R}^n$ og $F = \mathbb{R}$ har vi i tillegg:

vektor · vektor = skalar

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto \bar{u} \cdot \bar{v}$$

For hvert vektorrom V over F:

vektor + vektor = vektor

$$V \times V \longrightarrow V$$
$$(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto \bar{u} + \bar{v}$$

skalar · vektor = vektor

$$F \times V \longrightarrow V$$
$$(a, \bar{v}) \longmapsto a\bar{v}$$

Nå ønsker vi oss altså en operasjon til:

vektor · vektor = skalar

$$V \times V \longrightarrow F$$
$$(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto \text{"}\bar{u} \cdot \bar{v}\text{"} = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$$

HUSK FRA MA1201

Prikkproduktet er slik at

i) $\bar{v} \cdot \bar{v} \geq 0$;

ii) $\bar{v} \cdot \bar{v} = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$;

iii) $(\bar{u} + \bar{v}) \cdot \bar{w} = \bar{u} \cdot \bar{w} + \bar{v} \cdot \bar{w}$;

iv) $(\lambda \bar{u}) \cdot \bar{v} = \lambda (\bar{u} \cdot \bar{v})$;

v) $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$.

$\forall \; \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$

$\forall \; \lambda \in \mathbb{R}$

DEFINISJON

La V være et vektorrom over F (altså over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Et indreprodukt på V er en funksjon

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow F$$
$$(\bar{u}, \bar{v}) \longmapsto \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$$

med de følgende egenskapene $\forall\ \bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$, $c \in F$.

i) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \in \mathbb{R}$ og $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$.

ii) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$.

iii) $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

iv) $\langle c \cdot \bar{u}, \bar{v} \rangle = c \cdot \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$

v) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle}$ Konjugering i $\mathbb{C}$!

EKSEMPEL/DEFINISJON

På $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}^n$ har vi det euklidske indreproduktet (a.k.a. "prikkproduktet" fra MA1201).

Dette er altså funksjonen

$$\langle - , - \rangle \; : \; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle \bar{u} , \bar{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n \in \mathbb{R}$$

for alle

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n), \; \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Det er klart at aksiomene i) – v) holder her; definisjonen av abstrakte indreprodukt er jo ment å generalisere nettopp "prikkproduktet".

$\square$

EKSEMPEL

La $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ være ekte positive $(\neq 0)$.
Det vekta euklidske indreproduktet på $\mathbb{R}^n$ med vektene $a_1, a_2, \dots, a_n$ er funksjonen

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = a_1 u_1 v_1 + a_2 u_2 v_2 + \dots + a_n u_n v_n \in \mathbb{R}$$

for alle

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n),\ \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

I en samarbeidsoppgave skal vi sjekke at aksiomene i) – v) holder her. $\square$

EKSEMPEL

La $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ være ekte positive $(\neq 0)$. Det vekta euklidske indreproduktet på $\mathbb{R}^n$ med vektene $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er funksjonen

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = a_1 u_1 v_1 + a_2 u_2 v_2 + \ldots + a_n u_n v_n \in \mathbb{R}$$

for alle

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \ \bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n.$$

MERK

"Vanlig" euklidsk indreprodukt

=

vekta euklidsk indreprodukt med vekter $1, 1, \ldots, 1$

EKSEMPEL / DEFINISJON

På $\mathbb{C}$-vektorrommet $\mathbb{C}^n$ har vi det **euklidske indreproduktet**

Dette er funksjonen

$$\langle -,- \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

gitt ved

Konjugering i $\mathbb{C}$

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \dots + u_n\overline{v_n} \in \mathbb{C}$$

for alle

$$\bar{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n),\ \bar{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Igjen er det klart at aksiomene i) – v) holder (for v) må man huske noen regneregler for konjugering i $\mathbb{C}$).

$\square$

DEFINISJON

Et indreproduktrom er et vektorrom med et fiksert indreprodukt.

MERK

På et vektorrom V kan det finnes flere indreprodukt.

EKSEMPEL

På vektorrommet $\mathbb{R}^n$ har vi alle de vekta euklidske indreproduktene. Forskjellige vekter gir forskjellige indreprodukt.

EKSEMPEL

På $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har vi et indreprodukt

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, dx \qquad \forall \quad p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} .$$

i) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \in \mathbb{R}$ og $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$.

Det er klart at $\langle q, q \rangle \in \mathbb{R}$ og at

$$\langle q, q \rangle = \int_{-1}^{1} q(x) q(x) \, dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{(q(x))^2}_{\geq 0 \ \forall \ x \in [-1,1]} dx \geq 0$$

EKSEMPEL

På $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har vi et indreprodukt

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x)\, dx \qquad \forall \quad p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

ii) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}.$

$$\langle q, q \rangle = \int_{-1}^{1} q(x) q(x)\, dx = \int_{-1}^{1} \underbrace{(q(x))^2}_{\geq 0 \ \forall \ x \in [-1,1]} dx \ , \text{ så}$$

$$\langle q, q \rangle = 0 \iff q = \bar{0}.$$

EKSEMPEL

På $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har vi et indreprodukt

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, dx \qquad \forall \quad p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2} .$$

iii) $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$

$$\langle p + q, r \rangle = \int_{-1}^{1} \left(p(x) + q(x) \right) r(x) \, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} p(x) r(x) \, dx + \int_{-1}^{1} q(x) r(x) \, dx$$

$$= \langle p, r \rangle + \langle q, r \rangle .$$

EKSEMPEL

På $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har vi et indreprodukt

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, dx \qquad \forall \quad p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

iv) $\langle c \cdot \bar{u}, \bar{v} \rangle = c \cdot \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$

$$\langle c \cdot p, q \rangle = \int_{-1}^{1} (c \cdot p(x)) q(x) \, dx = c \cdot \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, dx$$

$$= c \cdot \langle p, q \rangle$$

EKSEMPEL

På $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har vi et indreprodukt

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, dx \qquad \forall \; p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

v) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle}$ ← Konjugering i $\mathbb{C}$!

Siden vi jobber med et $\mathbb{R}$-vektorrom, skal vi vise $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$. Dette er klart:

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x) q(x) \, dx = \int_{-1}^{1} q(x) p(x) \, dx = \langle q, p \rangle.$$

$\square$

EKSEMPEL

La $n \geq 1$ og la $a, b \in \mathbb{R}$ med $a < b$.

På $\mathbb{R}$-vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ har vi et indreprodukt

$$\langle -, - \rangle : \mathbb{R}[x]_{\leq n} \times \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x) q(x) \, dx \qquad \forall \quad p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq n} . \qquad \square$$

EKSEMPEL

La V være $\mathbb{R}$-vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner fra intervallet $[-1,1]$ til $\mathbb{R}$.

Da har vi et indreprodukt

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(t) g(t)\, dt \qquad \forall\ f, g \in V.$$

Aksiomene i) – v) kan sjekkes på samme vis som i eksempelet over med $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

$\square$

EKSEMPEL

La V være $\mathbb{R}$-vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner fra intervallet $[a,b]$ til $\mathbb{R}$.

Vi får et indreprodukt

$$\langle - , - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle f , g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \, dt \qquad \forall \; f, g \in V.$$

$\square$

MERK

La V være et indreproduktrom over $\mathbb{F}$.

Fiksér en vektor $\bar{v} \in V$. Da får vi en funksjon

$$\begin{cases} \langle -, \bar{v} \rangle : V \longrightarrow \mathbb{F} \\ \bar{x} \longmapsto \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle . \end{cases}$$

Altså, funksjonen $\langle -, \bar{v} \rangle : V \longrightarrow \mathbb{F}$ er gitt ved

$$\langle -, \bar{v} \rangle (\bar{x}) = \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle \quad \forall \ \bar{x} \in V.$$

FUNDAMENTALE EGENSKAPER (INDREPRODUKT)

La V være et indreproduktrom over F.
For hver $\bar{v} \in V$ har vi:

i) Funksjonen

$$\begin{cases} \langle - , \bar{v} \rangle : V \longrightarrow F \\ \qquad \bar{x} \longmapsto \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle \end{cases}$$

er en lineærtransformasjon.

BEVIS

La $\bar{x}, \bar{y} \in V$ og $c \in F$. Da er

- $\langle - , \bar{v} \rangle (\bar{x} + \bar{y}) = \langle \bar{x} + \bar{y}, \bar{v} \rangle \overset{\text{aksiom iii)}}{=} \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{v} \rangle = \langle - , \bar{v} \rangle (\bar{x}) + \langle - , \bar{v} \rangle (\bar{y})$

Definisjonen av $\langle - , \bar{v} \rangle$

og

- $\langle - , \bar{v} \rangle (c\bar{x}) = \langle c\bar{x}, \bar{v} \rangle \overset{\text{aksiom iv)}}{=} c \cdot (\langle \bar{x}, \bar{v} \rangle) = c \cdot (\langle - , \bar{v} \rangle (\bar{x}))$ $\square$

FUNDAMENTALE EGENSKAPER (INDREPRODUKT)

La V være et indreproduktrom over F.
For hver $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ og $c \in F$ har vi:

i) Funksjonen

$$\begin{cases} \langle - , \bar{v} \rangle : V \longrightarrow F \\ \qquad\quad \bar{x} \longmapsto \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle \end{cases}$$

er en lineærtransformasjon.

ii) $\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$

iii) $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$

iv) $\langle \bar{u}, c\bar{v} \rangle = \bar{c} \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$ Konjugering i $\mathbb{C}$

Bevises i S17

$\square$

NORM

DEFINISJON

La V være et indreprodukttrom. Normen til en vektor $\bar{v} \in V$ er

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}.$$

EKSEMPEL

Se på $\bar{v} = (1, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt.

Da er

$$\|\bar{v}\|^2 = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \langle (1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3}) \rangle = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4,$$

altså $\|\bar{v}\| = 2$. $\square$

DEFINISJON

La V være et indreproduktrom. Normen til en vektor $\bar{v} \in V$ er

$$\|\bar{v}\| = \sqrt{\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle}.$$

EKSEMPEL

Se på $\bar{v} = (1, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt.

Da er

$$\|\bar{v}\| = 2.$$

$\square$

EKSEMPEL

Se på $\bar{v} = (1, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$ med vekta euklidsk indreprodukt med vektene $6, 2$.

Da er

$$\|\bar{v}\|^2 = \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = \langle (1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3}) \rangle = 6 \cdot 1^2 + 2 \sqrt{3}^2 = 12$$

altså $\|\bar{v}\| = \sqrt{12}$ $(\neq 2)$.

$\square$

EKSEMPEL

Se på $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med indreproduktet gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx \qquad \forall \quad p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}.$$

Da er

$$\|1\|^2 = \int_{-1}^{1} 1^2\,dx = [x]_{-1}^{1} = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|1\| = \sqrt{2}}$$

$$\|x\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|x\| = \sqrt{\tfrac{2}{3}}}$$

$$\|x^2\|^2 = \int_{-1}^{1} (x^2)^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\|x^2\| = \sqrt{\tfrac{2}{5}}}.$$

EKSEMPEL

$\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx \Rightarrow$ $\boxed{\|1\| = \sqrt{2}}$ $\boxed{\|x\| = \sqrt{\frac{2}{3}}}$ $\boxed{\|x^2\| = \sqrt{\frac{2}{5}}}$. $\square$

EKSEMPEL

Se på $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med indreproduktet gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,dx \qquad \forall \quad p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq n}.$$

Da er

$$\|1\|^2 = \int_0^1 1^2\,dx = [x]_0^1 = 1 \Rightarrow \boxed{\|1\| = 1}$$

$$\|x\|^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \left[\tfrac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{\|x\| = \sqrt{\frac{1}{3}}}$$

$$\|x^2\|^2 = \int_0^1 (x^2)^2\,dx = \int_0^1 x^4\,dx = \left[\tfrac{1}{5}x^5\right]_0^1 = \frac{1}{5} \Rightarrow \boxed{\|x^2\| = \sqrt{\frac{1}{5}}}.$$

$\square$

FUNDAMENTALE EGENSKAPER (NORM)

La V være et indreproduktrom over F,
la $\bar{v} \in V$ og $c \in F$. Da holder:

i) $\|\bar{v}\| = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$.

ii) $\|c\bar{v}\| = |c|\,\|\bar{v}\|$.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

ORTOGONALITET

DEFINISJON

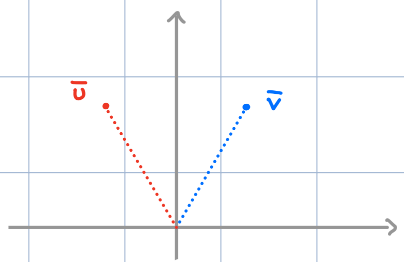
La V være et indreproduktrom.
To vektorer $\bar{u}, \bar{v} \in V$ er ortogonale hvis

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0.$$

EKSEMPEL (FORTS.)

Se på

$$\bar{u} = (-1, \sqrt{3}), \bar{v} = (1, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$$



med euklidsk indreprodukt.
Her er

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle (-1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3}) \rangle = (-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 \neq 0,$$

så $\bar{u}$ og $\bar{v}$ er **ikke** ortogonale. $\square$

DEFINISJON

La V være et indreproduktrom.
To vektorer $\bar{u}, \bar{v} \in V$ er ortogonale hvis

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0.$$

EKSEMPEL (FORTS.)

I $\mathbb{R}^2$ med euklidsk indreprodukt er vektorene $\bar{u} = (-1, \sqrt{3})$ og $\bar{v} = (1, \sqrt{3})$ ikke ortogonale. $\square$

EKSEMPEL (OGSÅ FORTS.)

Se på $\bar{u} = (-1, \sqrt{3}), \bar{v} = (1, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^2$ med vekta euklidsk indreprodukt med vektene $6, 2$. Da er

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \langle (-1, \sqrt{3}), (1, \sqrt{3}) \rangle = 6 \cdot (-1) \cdot 1 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = -6 + 6 = 0,$$

så $\bar{u}$ og $\bar{v}$ er ortogonale. $\square$

FUNDAMENTALE EGENSKAPER (ORTOGONALITET)

La V være et indreproduktrom.

i) $\bar{0}$ er ortogonal med hver vektor i V.

ii) $\bar{0}$ er den eneste vektoren i V som er ortogonal med seg selv.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

TEOREM (PYTHAGORAS)

La V være et indreproduktrom.
Hvis $\bar{u}, \bar{v} \in V$ er ortogonale, så er
$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2.$$

BEVIS

Vi har
$$\|\bar{u} + \bar{v}\|^2 = \langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{u} + \bar{v} \rangle$$

Definisjon av norm

$$= \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$

aksiom iii) og FUNDAMENTAL EGENSKAP iii)

$$= \langle \bar{u}, \bar{u} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{v} \rangle$$

$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = 0 = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle$

$$= \|\bar{u}\|^2 + \|\bar{v}\|^2.$$

$\square$