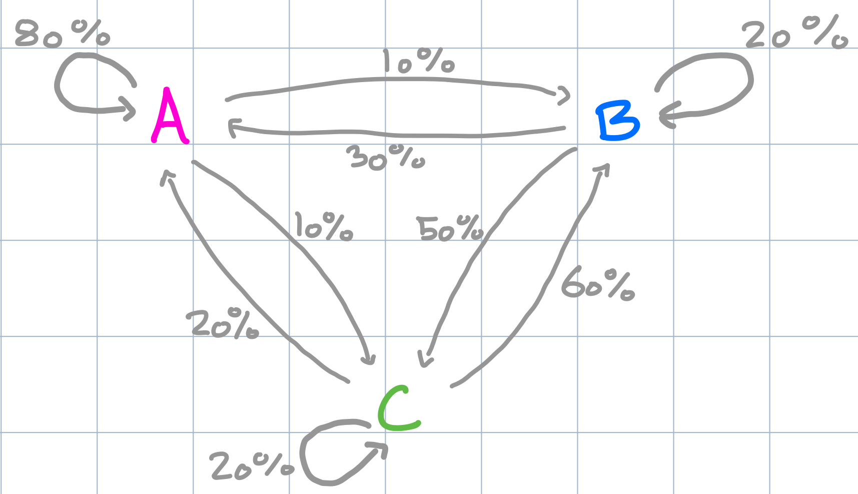
ANVENDELSE: MARKOV-KJEDER

FORELESNING V16

MOTIVASJON

Et firma leier ut elsykler. Hver sykkel må returneres innen midnatt til en av tre ladestasjoner (A, B, C), men ikke nødvendigvis til den samme ladestasjonen som den ble hentet ut fra.

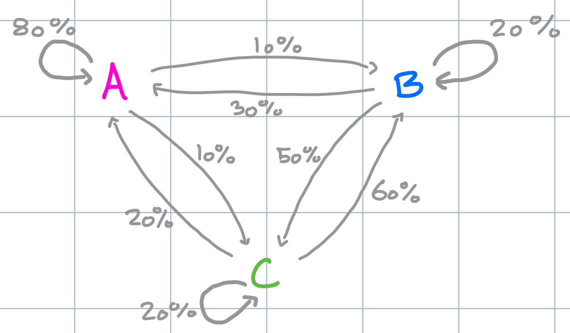
Tuva og Solveig fører statistikk og har funnet:



HVORDAN FORDELER SYKLENE SEG PÅ SIKT?

Et firma leier ut elsykler. Hver sykkel må returneres innen midnatt til en av tre ladestasjoner (A, B, C), men ikke nødvendigvis til den samme ladestasjonen som den ble hentet ut fra.

Tuva og Solveig fører statistikk og har funnet:



	SYKKEL HENTES FRA A	B	C
SYKKEL RETURNERES TIL A	80%	30%	20%
SYKKEL RETURNERES TIL B	10%	20%	60%
SYKKEL RETURNERES TIL C	10%	50%	20%

			STYKKEL HENTES FRA		
		A	B	C
STYKKEL RETURNERES TIL	A	80%	30%	20%
STYKKEL RETURNERES TIL	B	10%	20%	60%
STYKKEL RETURNERES TIL	C	10%	50%	20%

Anta at på mandag var fordelinga slik:

A : 300 sykler
B : 200 sykler
C : 500 sykler

$$\left.\begin{array}{l} A: 300 \text{ sykler} \\ B: 200 \text{ sykler} \\ C: 500 \text{ sykler} \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \underbrace{\bar{x}^{(0)}}_{\text{Fordeling på dag null}}$$

I følge statistikken, hvordan blir fordelinga på tirsdag?
Altså, hva er $\bar{x}^{(1)}$?

La

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Da blir

$$\underbrace{\bar{x}^{(1)}}_{\text{Forventet fordeling etter 1 dag}} = P\,\bar{x}^{(0)} \quad \left(= \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0.37 \\ 0.23 \end{pmatrix} \right).$$

		STYKKEL HENTES FRA		
		A	B	C
STYKKEL RETURNERES TIL	A	80%	30%	20%
STYKKEL RETURNERES TIL	B	10%	20%	60%
STYKKEL RETURNERES TIL	C	10%	50%	20%

Anta at på mandag var fordelinga slik:

$$\left.\begin{array}{lll} A: & 300 & \text{sykler} \\ B: & 200 & \text{sykler} \\ C: & 500 & \text{sykler} \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \bar{x}^{(0)}$$

I følge statistikken, hvordan blir fordelinga på onsdag?

Altså, hva er $\bar{x}^{(2)}$?

La

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Da blir

$$\underbrace{\bar{x}^{(2)}}_{\text{Forventet fordeling etter 2 dager}} = P \underbrace{\bar{x}^{(1)}}_{= P\bar{x}^{(0)}} = \underbrace{P}_{\text{"P opphøyd i 2"}}{}^{2} \, \bar{x}^{(0)} \quad \left(= \begin{pmatrix} 0.477 \\ 0.252 \\ 0.271 \end{pmatrix} \right).$$

	SYKKEL HENTES FRA A	B	C
SYKKEL RETURNERES TIL A	80%	30%	20%
SYKKEL RETURNERES TIL B	10%	20%	60%
SYKKEL RETURNERES TIL C	10%	50%	20%

Anta at på mandag var fordelinga slik:

$$\left.\begin{array}{l} A: \ 300 \text{ sykler} \\ B: \ 200 \text{ sykler} \\ C: \ 500 \text{ sykler} \end{array}\right\} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0.3 \\ 0.2 \\ 0.5 \end{pmatrix} = \bar{x}^{(0)}$$

I følge statistikken, hvordan blir fordelinga etter n dager?
Altså, hva er $\bar{x}^{(n)}$?

La

$$P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$$

Da blir

$$\underbrace{\bar{x}^{(n)}}_{\text{Forventet fordeling etter n dager}} = P\underbrace{\bar{x}^{(n-1)}}_{=P\bar{x}^{(n-2)}} = \underbrace{P^n}_{\text{"P opphøyd i n"}}\bar{x}^{(0)} = ??$$

} Dette er selve poenget i dag

ALTSÅ

Vi er ute etter

Vi gå mening til slike grenser i samarbeidsoppgavene S15

$$\lim_{n\to\infty} P^n \bar{x} =: \bar{x}^{(\infty)}$$

BETIMELIGE SPØRSMÅL

- Eksisterer vektoren $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan finner vi i så fall $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan endrer $\bar{x}^{(\infty)}$ seg hvis vi endrer utgangspunktet $\bar{x}$?

MARKOV-KJEDER

Anta at vi har et "system" som over tid kan bevege seg mellom ulike "tilstander". Anta videre at

- vi observerer systemet ved ulike tidspunkt og at
- sannsynligheten for at systemet havner i en gitt tilstand er bestemt kun av den forrige tilstanden.

Da kaller vi prosessen en Markov-kjede.

KONSTRUKSJON

I en Markov-kjede med k mulige tilstander $1, \dots, k$ lar vi:

p_{ij} := sannsynligheten for at systemet havner i tilstand i rett etter at systemet har vært i tilstand j

$(k \times k)$-matrisa

$$P = [p_{ij}]$$

kalles overgangsmatrisa for Markov-kjeden.

EKSEMPEL

Overgangsmatrisa for sykkelutleiefirmaet er

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}5 & 0{,}2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

DEFINISJON

En **tilstandsvektor** for en observasjon av en Markov-prosess med k mulige tilstander $1, \ldots, k$ er en kolonnevektor

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

hvor x_j er sannsynligheten for at systemet befinner seg i tilstand j på dette tidspunktet.

EKSEMPEL

I eksempelet med sykkelutleie er hver $x^{(n)}$ en tilstandsvektor. $\square$

POENGET

Hvis vi kjenner en tilstandsvektor $\bar{x}^{(0)}$ for en Markov-kjede ved et "utgangspunkt", så kan vi finne tilstandsvektorene

$$\bar{x}^{(1)}, \quad \bar{x}^{(2)}, \quad \bar{x}^{(3)}, \quad \dots$$

for de påfølgende tidspunktene som

$$x^{(n)} = \underbrace{P^n}_{\text{Overgangsmatrisa opphøyd i } n} \bar{x}^{(0)}$$

Vektoren $\underbrace{\lim_{n\to\infty} P^n \bar{x}^{(0)}}_{\text{Beskriver "fordelinga" på lang sikt}}$ kalles en stabil tilstandsvektor.

(KONVERGENS AV)
FØLGER AV MATRISER

FINE FAKTA

La $A_0, A_1, A_2, \ldots$ være en følge av $(k \times k')$-matriser og anta at matrisa

$$\lim_{n\to\infty} A_n$$

eksisterer.

Hvis T er ei $(t \times k)$-matrise og S er ei $(k' \times s)$-matrise, så er

$$\lim_{n\to\infty} TA_nS = T\left(\lim_{n\to\infty} A_n\right)S. \qquad \square$$

EKSEMPEL

La A være en kvadratisk matrise. Hvis A har en egenverdi λ med $|\lambda| > 1$, så eksisterer ikke

$$\lim_{n \to \infty} A^n .$$

$\ulcorner$

La λ være en egenverdi for A. Da finnes en $\bar{v} \neq \bar{0}$ slik at $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$. Hvis $\lim_{n \to \infty} A^n$ eksisterer, så får vi

FINE FAKTA

$$\underbrace{\left(\lim_{n \to \infty} \lambda^n\right)}_{\text{Eksisterer ikke hvis } |\lambda| > 1.}\bar{v} = \lim_{n \to \infty} \lambda^n \bar{v} = \lim_{n \to \infty} A^n \bar{v} = \left(\lim_{n \to \infty} A^n\right)\bar{v}$$

$\llcorner$ $\square$

EKSEMPEL

La A være ei diagonaliserbar matrise. Hvis hver egenverdi λ for A tilfredsstiller

$\lambda = 1$ eller $|\lambda| < 1$,

så eksisterer $\lim_{n\to\infty} A^n$.

A diagonaliserbar $\Rightarrow \exists$ inverterbar Q slik at

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k \end{pmatrix} =: D$$

Da blir $A^n = QD^nQ^{-1}$ $\forall$ $n \geq 1$ (dette har vi sett mange ganger, e.g. S14.1), så

$$\lim_{n\to\infty} A^n = \lim_{n\to\infty} QD^nQ^{-1} = Q\left(\lim_{n\to\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_k^n \end{pmatrix}\right)Q^{-1},$$

og denne grensa eksisterer (hver $\lim_{n\to\infty} \lambda_i^n$ er lik 0 eller 1 per antagelse). $\square$

MERK

- Hvis

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$$

Vektorer som oppfyller I og II kalles sannsynlighetsvektorer

er en tilstandsvektor for en Markov-kjede, så må

I $\quad x_i \geq 0 \quad \forall \quad i = 1, \dots, k$ og

II $\quad x_1 + x_2 + \dots + x_k = 1$.

- Hvis P er overgangsmatrisa til en Markov-kjede, så må hver kolonne i P oppfylle I og II

Matriser med sannsynlighetsvektorer som kolonner, kalles stokastiske.

EKSEMPEL

Matrisa

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

er stokastisk. Men

$$P = P^3 = P^5 = P^7 = \dots$$

og

$$I_{2\times 2} = P^2 = P^4 = P^6 = P^8 = \dots,$$

så $\lim_{n\to\infty} P^n$ eksisterer ikke. $\square$

REGULÆRE MARKOV-KJEDER

DEFINISJON

Ei overgangsmatrise P for en Markov-kjede er **regulær** hvis det finnes en $n \geq 1$ slik at $[P^n]_{ij} > 0$ i hver posisjon (i,j).

EKSEMPEL

$P = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$ er regulær siden $P^2 = \begin{pmatrix} 0.75 & 0.5 \\ 0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$ $\square$

EKSEMPEL

$P = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$ er ikke regulær.

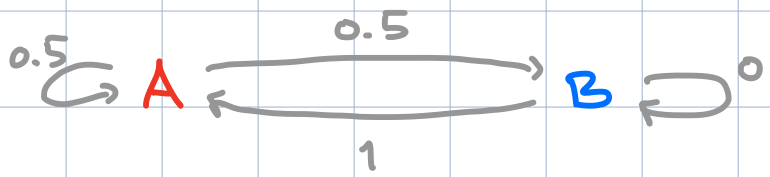
$\square$

GRAFISK TOLKNING AV REGULARITET

Ei overgangsmatrise er regulær hvis vi i den tilhørende grafen fra hver tilstand kan bevege oss til hvilken som helst tilstand langs piler med ikke-null sannsynlighet. $\square$

EKSEMPEL

La $P = \begin{pmatrix} 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}$. Den tilhørende grafen er



,

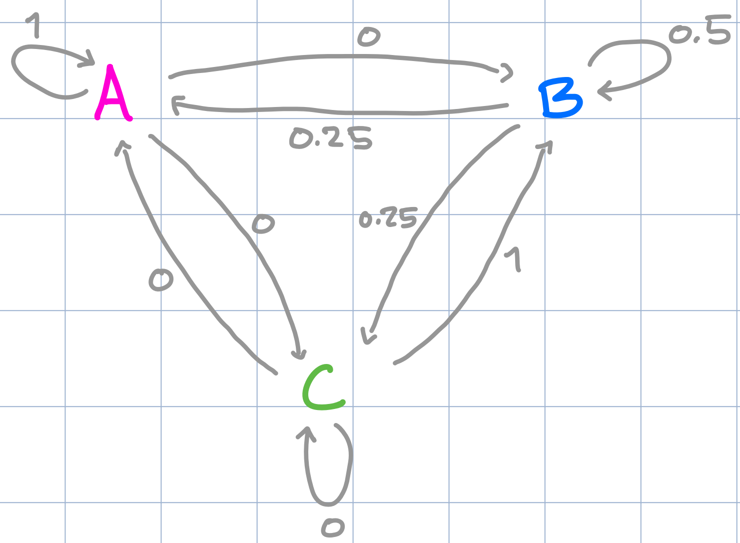
så P er regulær. $\square$

GRAFISK TOLKNING AV REGULARITET

Ei overgangsmatrise er regulær hvis vi i den tilhørende grafen **fra hver tilstand** kan bevege oss **til hvilken som helst tilstand** langs piler med ikke-null sannsynlighet. □

EKSEMPEL

La $P = \begin{pmatrix} 1 & 0.25 & 0 \\ 0 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}$. Den tilhørende grafen er



så P er ikke regulær

(ingen ikke-null vei

fra A til B

(ei heller fra A til C)). □

TEOREM (!)

Hvis P er ei regulær overgangsmatrise, så er

$$\lim_{n \to \infty} P^n = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix}$$

og vektoren

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix}$$

er en sannsynlighetsvektor. $\square$

HUSK

$$\lim_{n\to\infty} P^n \bar{x} =: \bar{x}^{(\infty)}$$

BETIMELIGE SPØRSMÅL

- Eksisterer vektoren $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan finner vi i så fall $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan endrer $\bar{x}^{(\infty)}$ seg hvis vi endrer utgangspunktet $\bar{x}$?

$$\lim_{n\to\infty} P^n \bar{x} =: \bar{x}^{(\infty)}$$

- Eksisterer vektoren $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan finner vi i så fall $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan endrer $\bar{x}^{(\infty)}$ seg hvis vi endrer utgangspunktet $\bar{x}$?

KOROLLAR

La P være ei regulær overgangsmatrise. Hvis $\bar{x}$ er en sannsynlighetsvektor, så er

$$\lim_{n\to\infty} P^n \bar{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} =: \bar{q}$$

= Kolonne fra matrisa $\lim_{n\to\infty} P^n$

(som: TEOREM(!))

BEVIS

$$P \text{ regulær} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P^n \bar{x} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{pmatrix} = \bar{q}$$

La P være regulær. Da er

TEOREM (!)

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix}.$$

Hvis $\bar{x}$ er en sannsynlighetsvektor, så blir

$$\lim_{n\to\infty} P^n \bar{x} = \left(\lim_{n\to\infty} P^n\right)\bar{x} = \begin{pmatrix} q_1 & q_1 & \cdots & q_1 \\ q_2 & q_2 & \cdots & q_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_k & q_k & \cdots & q_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1x_1 + q_1x_2 + \cdots + q_1x_k \\ q_2x_1 + q_2x_2 + \cdots + q_2x_k \\ \vdots \\ q_kx_1 + q_kx_2 + \cdots + q_kx_k \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(x_1 + x_2 + \ldots + x_k)}_{=1}\,\bar{q} = \bar{q} \qquad \square$$

BETIMELIGE SPØRSMÅL

- Eksisterer vektoren $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan finner vi i så fall $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan endrer $\bar{x}^{(\infty)}$ seg hvis vi endrer utgangspunktet $\bar{x}$?

SVAR

Hvis overgangsmatrisa er regulær, så vil Markov-prosessen nærme seg en fiksert stabil tilstands-vektor $\bar{q}$, og denne er uavhengig av hvilken tilstand systemet i utgangspunktet befant seg i. $\square$

$$\lim_{n\to\infty} P^n \bar{x} =: \bar{x}^{(\infty)}$$

- Eksisterer vektoren $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan finner vi i så fall $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan endrer $\bar{x}^{(\infty)}$ seg hvis vi endrer utgangspunktet $\bar{x}$?

TEOREM

La P være ei regulær overgangsmatrise. Den stabile tilstandsvektoren $\bar{q}$ er den entydige sannsynlighetsvektoren som oppfyller

$$P\bar{q} = \bar{q}.$$

La P være ei regulær overgangsmatrise. Den stabile tilstandsvektoren $\bar{q}$ er den entydige sannsynlighetsvektoren som oppfyller

$$P\bar{q} = \bar{q}$$

BEVIS

Vi har

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} P^{n+1} = \lim_{n\to\infty} PP^n = P\left(\lim_{n\to\infty} P^n\right).$$

Det betyr at $P\bar{q} = \bar{q}$, siden hver kolonne i $\lim_{n\to\infty} P^n$ er lik $\bar{q}$.

For å vise entydighet, la $\bar{r}$ være en sannsynlighets-vektor med $P\bar{r} = \bar{r}$. Da blir $P^n\bar{r} = \bar{r}$ $\forall\, n \geq 0$, og dermed

$$\bar{r} = \lim_{n\to\infty} P^n \bar{r} = \bar{q}.$$

$\square$

BETIMELIGE SPØRSMÅL

- Eksisterer vektoren $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan finner vi i så fall $\bar{x}^{(\infty)}$?
- Hvordan endrer $\bar{x}^{(\infty)}$ seg hvis vi endrer utgangspunktet $\bar{x}$?

SVAR

Hvis overgangsmatrisa P er regulær, så finner vi den stabile tilstandsvektoren $\bar{q}$ som (den entydige) sannsynlighetsvektoren som er en egenvektor for P tilhørende egenverdien 1.

				STYKKEL HENTES FRA		
				A	B	C
STYKKEL	RETURNERES	TIL	A	80%	30%	20%
STYKKEL	RETURNERES	TIL	B	10%	20%	60%
STYKKEL	RETURNERES	TIL	C	10%	50%	20%

EKSEMPEL

Husk sykkelutleiefirmaet.

Her er overgangsmatrisa $P = \begin{pmatrix} 0.8 & 0.3 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 & 0.6 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \end{pmatrix}$ regulær,

så vi finner den stabile tilstandsvektoren $\bar{q}$ ved å løse $P\bar{q} = \bar{q}$, altså $(P - I_{3\times3})\bar{q} = \bar{0}$.

Den generelle løsningen er $\bar{q} = s\begin{pmatrix} 34 \\ 14 \\ 13 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$. For å få en sannsynlighetsvektor må vi la

$$s = \frac{1}{34+14+13} = \frac{1}{61},$$

så den stabile tilstandsvektoren er $\begin{pmatrix} 34/61 \\ 14/61 \\ 13/61 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.557 \\ 0.230 \\ 0.213 \end{pmatrix}$.

HVORDAN FORDELER SYKLENE SEG PÅ SIKT?

Firmaet har totalt 1000 sykler, altså vil fordelinga på sikt være

- 557 sykler på ladestasjon A,
- 230 sykler på ladestasjon B og
- 213 sykler på ladestasjon C.