ANVENDELSE:
SYSTEMER AV LINEÆRE DIFFERENSIALLIGNINGER

FORELESNING V15

VÅRT MÅL

Løse systemer av differensialligninger på formen

$$
\begin{aligned}
y_1' &= a_{11} y_1 + a_{12} y_2 + \dots + a_{1n} y_n \\
y_2' &= a_{21} y_1 + a_{22} y_2 + \dots + a_{2n} y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1} y_1 + a_{n2} y_2 + \dots + a_{nn} y_n
\end{aligned}
$$

hvor
- a_{ij} er konstanter,
- $y_i = y_i(x)$ er funksjoner som skal bestemmes.

$$\left.\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\
&\vdots \\
y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n
\end{aligned}\right\} (*)$$

OBSERVASJON

Systemet $(*)$ kan skrives som $\bar{y}' = A\bar{y}$ hvor

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\}$$

Matriseform:

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

HUSK

Ligninga $y' = ay$ er lett å løse: $\boxed{y = ce^{ax}}$.

EKSEMPEL

Det er lett å løse systemet

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 \\ y_2' &= -2y_2 \\ y_3' &= 5y_3 \end{aligned}\right\}$$

Matriseform: $\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

siden vi kan løse ligningene hver for seg:

$$\boxed{y_1 = c_1 e^{3x} \; ; \; y_2 = c_2 e^{-2x} \; ; \; y_3 = c_3 e^{5x}}.$$

$\square$

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned}\right\}$$

Matriseform:

$$\bar{y}' = A\bar{y}$$

MERK

Systemet i forrige **EKSEMPEL** er lett å løse fordi hver ligning involverer kun én funksjon (y_1, y_2 eller y_3). Med andre ord, i matriseformen $\bar{y}' = A\bar{y}$ er A ei diagonal matrise.

IDÉ

Hvordan løse $\bar{y}' = A\bar{y}$?

Hvis A er diagonaliserbar, finn en substitusjon for $\bar{y}$ som utnytter dette!

STRATEGI

Anta at Q diagonaliserer A, altså at $Q^{-1}AQ = D$ er diagonal.
Da kan $\bar{y}' = A\bar{y}$ løses slik:

1) Skriv $\bar{y} = Q\bar{u}$ (og $\bar{y}' = Q\bar{u}'$) hvor

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \left(\text{og} \quad \bar{u}' = \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \\ \vdots \\ u_n' \end{pmatrix}\right)$$

og hver $u_i = u_i(x)$ er en (ukjent) funksjon.

2) Innsatt i $\bar{y}' = A\bar{y}$ gir dette $Q\bar{u}' = AQ\bar{u}$, altså

$$\bar{u}' = Q^{-1}AQ\,\bar{u} = D\bar{u} \qquad (**)$$

3) Løs ligninga $(**)$ mhp. $\bar{u}$ (dette er lett)

4) Finn $\bar{y}$ som $\bar{y} = Q\bar{u}$. $\square$

EKSEMPEL

Finn en løsning av systemet

$$y_1' = y_1 + y_2$$
$$y_2' = 4y_1 - 2y_2$$

som oppfyller $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 6$.

Vi ser altså på $\bar{y}' \overset{(*)}{=} A\bar{y}$ hvor $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$, $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $\bar{y}' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}$.

Kan vi bruke vår STRATEGI ?

JA! Matrisa A har egenverdiene 2 og -3 med tilhørende egenvektorer $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} -1/4 \\ 1 \end{pmatrix}$, hhv. Da vet vi at

$$Q^{-1}AQ = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \quad \text{hvor} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) La $\bar{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ og skriv $\bar{y} = Q\bar{u}$.

2) Nå blir (*) til ligninga $\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \bar{u}' = D\bar{u} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, altså

$$u_1' = 2u_1$$
$$u_2' = -3u_2.$$

3) Vi løser lett det siste systemet:

$$u_1 = c_1 e^{2x} \;;\; u_2 = c_2 e^{-3x}.$$

4) Finn de opprinnelige ukjente funksjonene y_1 og y_2:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \bar{y} = Q\bar{u} = \begin{pmatrix} 1 & -1/4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - \frac{1}{4}u_2 \\ u_1 + u_2 \end{pmatrix},$$

altså

(I) $\quad y_1 = u_1 - \frac{1}{4}u_2 = c_1 e^{2x} - \frac{1}{4}c_2 e^{-3x}$

(II) $\quad y_2 = u_1 + u_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}$.

DETTE ER DEN GENERELLE LØSNINGA

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad y_1 = u_1 - \tfrac{1}{4} u_2 = c_1 e^{2x} - \tfrac{1}{4} c_2 e^{-3x} \\
&(\mathrm{II}) \quad y_2 = u_1 + u_2 = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-3x}
\end{aligned}
$$

Til slutt kan vi bestemme c_1 og c_2 slik at $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 6$.

Disse to betingelsene impliserer nemlig

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{I}) \quad 1 = y_1(0) = c_1 e^{2\cdot 0} - \tfrac{1}{4} c_2 e^{-3\cdot 0} = c_1 - \tfrac{1}{4} c_2 \\
&(\mathrm{II}) \quad 6 = y_2(0) = c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{-3\cdot 0} = c_1 + c_2 .
\end{aligned}
$$

Dette systemet har løsning $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, så endelig svar er

$$
\underline{\underline{y_1 = 2e^{2x} - e^{-3x} \quad ; \quad y_2 = 2e^{2x} + 4e^{-3x}.}}
$$

$\square$