MA1202/6202

KOMPLEKSE EGENVERDIER

FORELESNING V14

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise A er øvre triangulær hvis

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Null under hoveddiagonalen!

TEOREM

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{C}$ og la $f: V \to V$ være en lineær operator.
Da finnes en ordna basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

OBSERVASJON

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom (over $\mathbb{F}$) og la $f: V \longrightarrow V$ være en lineær operator.
De følgende utsagnene er ekvivalente for $\lambda \in \mathbb{F}$.

a) λ er en egenverdi for f.

b) Operatoren $f - \lambda \cdot id_V$ er ikke injektiv.

c) Operatoren $f - \lambda \cdot id_V$ er ikke surjektiv.

d) Operatoren $f - \lambda \cdot id_V$ er ikke inverterbar.

$f - \lambda \cdot id_V : V \longrightarrow V$ er gitt ved
$(f - \lambda \cdot id_V)(\bar{v}) = f(\bar{v}) - \lambda \bar{v} \quad \forall \bar{v} \in V$

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

PROPOSISJON I

La $f: V \to V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt og ikke-null vektorrom V over $\mathbb{C}$. Da har f en egenverdi.

BEVIS

Skriv $\dim V = n$ og velg en $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$. Da er

$$\{\bar{v}, f(\bar{v}), f^2(\bar{v}), \dots, f^n(\bar{v})\}$$

lineært avhengig. Altså kan vi skrive

$$\bar{0} = a_0 \bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + a_2 f^2(\bar{v}) + \dots + a_n f^n(\bar{v})$$

hvor $a_i \in \mathbb{C}$ og minst én $a_i \neq 0$. Merk at faktisk må et av tallene $a_1, \dots, a_n$ være ikke-null (ellers får vi $\bar{0} = a_0 \bar{v}$ som impliserer at også $a_0 = 0$).

PROPOSISJON I

La $f: V \to V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt og ikke-null vektorrom V over $\mathbb{C}$.
Da har f en egenverdi.

BEVIS

En av disse er $\neq 0$

Har sett: $\bar{0} = a_0 \bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + a_2 f^2(\bar{v}) + \ldots + a_n f^n(\bar{v})$

Se på polynomet $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x]$. I følge ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM finnes $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ slik at

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = c(x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_m).$$ ($m < n$ hvis $a_n = 0$)

Det betyr at

$$\bar{0} = a_0 \bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + \ldots + a_n f^n(\bar{v})$$
$$= (a_0 \cdot id_V + a_1 f + \ldots + a_n f^n)(\bar{v}) = c(f - \lambda_1 \cdot id_V) \circ \ldots \circ (f - \lambda_m \cdot id_V)(\bar{v}).$$

Altså er $f - \lambda_j \cdot id_V$ ikke injektiv for minst én j, så f har en egenverdi ved forrige OBSERVASJON. $\square$

PROPOSISJON I

La $f: V \to V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt og ikke-null vektorrom V over $\mathbb{C}$.
Da har f en egenverdi.

MERK

Dette betyr at det finnes en ordna basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er på formen

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda & ? \\ 0 & \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix}$$

Vi får $[f(\bar{v})]_\beta = [\lambda \bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

Ved PROPOSISJON I finnes en egenverdi λ for f. La $\bar{v} \in V$ være en tilhørende egenvektor. Utvid $\{\bar{v}\}$ til den ønskede ordna basisen $\beta = \{\bar{v}, \bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$

PROPOSISJON II

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom (over F), la $f: V \to V$ være en lineær operator og la $\beta = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ være en ordna basis for V.

De følgende utsagnene er ekvivalente.

a) Matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

b) $f(\bar{v}_j) \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_j) \quad \forall\ 1 \leq j \leq n$.

c) $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_j)$ er f-invariant $\forall\ 1 \leq j \leq n$.

BEVIS

a) $\Leftrightarrow$ b): Opplagt.

c) $\Rightarrow$ b): Opplagt.

b) $\Rightarrow$ c):

b) $f(\bar{v}_j) \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j) \quad \forall\ 1 \le j \le n$.

c) $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ er f-invariant $\forall\ 1 \le j \le n$.

BEVIS

b) => c): Anta at b) holder og velg en j $(1 \le j \le n)$.

Da har vi:

$$f(\bar{v}_1) \in \operatorname{span}(\bar{v}_1) \subset \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_j)$$

$$f(\bar{v}_2) \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2) \subset \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_j)$$

$$\vdots$$

$$f(\bar{v}_j) \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_j)$$

Derfor, hvis $\bar{v} \in V$ er en lineærkombinasjon av $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j$, så vil $f(\bar{v}) \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$.

Altså, $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_j)$ er f-invariant. $\square$

TEOREM

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{C}$ og la $f : V \to V$ være en lineær operator.
Da finnes en ordna basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær.

$\mathbb{C}$-vektorrom V med $\dim V < \infty$, $f : V \longrightarrow V$

$\Rightarrow \exists\ \beta$ s.a. $[f]_\beta$ øvre triangulær

BEVIS

Skriv $\dim V = n$. Vi bruker induksjon på n. Det er trivielt at resultatet holder for $n = 1$.

Anta at $n > 1$ og at resultatet holder for hvert vektorrom over $\mathbb{C}$ med dimensjon $< n$.

Ved PROPOSISJON I har f en egenverdi: $\lambda \in \mathbb{C}$.

Se på underrommet

$$U := \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot id_V) \subset V.$$

$\mathbb{C}$-vektorrom V med $\dim V < \infty$, $f: V \longrightarrow V$

$\Rightarrow \exists\ \beta$ s.a. $[f]_\beta$ øvre triangulær

Se på underrommet

$$U := \operatorname{Im}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V) \subset V.$$

Da er $\dim U < n$ ved vår tidligere OBSERVASJON.

Dessuten er U f-invariant:

$$\bar{u} \in U \Rightarrow f(\bar{u}) = f(\bar{u}) - \lambda\bar{u} + \lambda\bar{u}$$

$$= \underbrace{(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)(\bar{u})}_{\in U} + \underbrace{\lambda\bar{u}}_{\in U} \in U.$$

Dermed får vi en operator $f|_U : U \longrightarrow U$ (som introdusert i FORELESNING E12). Ved induksjonshypotesen finnes en basis $\gamma = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m\}$ for U slik at matrisa $[f|_U]_\gamma$ er øvre triangulær. Ved PROPOSISJON II er

$$f(\bar{u}_j) \in \operatorname{span}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_j) \quad \text{for} \quad 1 \le j \le m. \qquad (*)$$

$\mathbb{C}$-vektorrom V med $\dim V < \infty$, $f : V \longrightarrow V$

$\Rightarrow \exists\, \beta$ s.a. $[f]_\beta$ øvre triangulær

Utvid γ til en ordna basis $\beta = \{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, v_s\}$ for hele V. For hver k har vi:

$$f(\bar{v}_k) = f(\bar{v}_k) - \lambda v_k + \lambda \bar{v}_k = \underbrace{(f - \lambda \cdot id_V)(\bar{v}_k)}_{\in U = \mathrm{Im}(f - \lambda \cdot id_V)} - \lambda \bar{v}_k.$$

Det er nå klart at

$$f(\bar{v}_k) \in \mathrm{span}(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) \qquad (**)$$

så $(*)$ og $(**)$ sammen med PROPOSISJON II gir at $[f]_\beta$ er øvre triangulær. $\square$

EKSEMPEL

La $f : F^3 \longrightarrow F^3$ være gitt ved $(x, y, z) \overset{f}{\longmapsto} (x, -z, y)$.

Tilfellet $F = \mathbb{R}$:

Det finnes ingen ordna basis β for $\mathbb{R}^3$ som er slik at matrisa $[f]_\beta$ er triangulær!

Tilfellet $F = \mathbb{C}$:

Operatoren f er sågar diagonaliserbar!

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad \beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \right\}.$$

$\square$