DIAGONALISERING

FORELESNING V13

SETUP

V er et endeligdimensjonalt vektorrom og $f: V \to V$ er en linear operator.

DEFINISJON

Operatoren f er diagonaliserbar hvis det finnes en ordna basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

DEFINISJON

Operatoren f er ==diagonaliserbar== hvis det finnes en ordna basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

PROPOSISJON (ALTERNATIV DEFINISJON)

Operatoren f er diagonaliserbar $\iff$ Det finnes en (ordna) basis for V som består av egenvektorer for f.

BEVIS

$\Rightarrow$: Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en ordna basis slik at $[f]_\beta = D$ er diagonal, så blir

$$[f(\bar{v}_i)]_\beta = [f]_\beta \cdot [\bar{v}_i]_\beta = [\underbrace{D_{ii}}_{=\lambda_i} \cdot \bar{v}_i]_\beta \Rightarrow \bar{v}_i \text{ er en egenvektor.}$$

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad [\bar{v}_i]_\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

DEFINISJON

Operatoren f er **diagonaliserbar** hvis det finnes en ordna basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

PROPOSISJON (ALTERNATIV DEFINISJON)

Operatoren f er diagonaliserbar $\iff$ Det finnes en (ordna) basis for V som består av egenvektorer for f.

BEVIS

$\Leftarrow$: Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er en basis slik at $f(\bar{v}_i) = \lambda_i \bar{v}_i$ for skalarer $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, så blir

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Husk: Kolonne j av $[f]_\beta$ er koordinatvektoren $[f(\bar{v}_j)]_\beta$.

$\square$

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

DEFINISJON

Operatoren f er diagonaliserbar hvis det finnes en ordna basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal.

PROPOSISJON (ALTERNATIV DEFINISJON)

Operatoren f er diagonaliserbar $\Longleftrightarrow$ Det finnes en (ordna) basis for V som består av egenvektorer for f.

KOROLLAR

Hvis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ er en ordna basis av egenvektorer for f med $f(\bar{v}_i) = \lambda_i \bar{v}_i$ for hver i, så har den diagonale matrisa $[f]_\beta$ skalaren λ_i på plass nummer i på diagonalen. $\square$

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

OBSERVASJON I

Hvis f er diagonaliserbar, så kan $\text{charpol}(f) \in F[x]$ skrives som et produkt av polynomer av grad 1 (vi sier da at $\text{charpol}(f)$ splitter).

BEVIS

f diagonaliserbar $\Rightarrow$ $\exists$ ordna basis $\beta \subset V$ slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{charpol}(f) = \det \begin{pmatrix} x-\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x-\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-\lambda_n \end{pmatrix}$$

$$= (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x-\lambda_n). \qquad \square$$

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

OBSERVASJON II

La $\dim V = n < \infty$. Hvis f har n distinkte egenverdier, så er f diagonaliserbar.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

MULTIPLISITET

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

DEFINISJON

La λ være en egenverdi for f. Det tilhørende **egenrommet** er

$$E_\lambda = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \} \subset V$$

MERK

E_λ er et underrom av V.

[Fordi $E_\lambda = \mathrm{Ker}(f - \lambda \cdot \mathrm{id}_V)$.] $\square$

DEFINISJON

La λ være en egenverdi for f.

- Den **geometriske multiplisiteten** til λ er tallet $\dim E_\lambda$.
- Den **algebraiske multiplisiteten** til λ er det største tallet $m(\lambda)$ slik at $(x-\lambda)^{m(\lambda)} \mid \mathrm{charpol}(f)$.

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

PROPOSISJON

La λ være en egenverdi for f. Da er $\dim E_\lambda \leq m(\lambda)$.

BEVIS

Velg en ordna basis $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ for E_λ og utvid til en ordna basis $\beta = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p, \bar{v}_{p+1}, \dots, \bar{v}_n\}$ for V.
For $1 \leq i \leq p$ er $\bar{v}_i$ en egenvektor for f som hører til egenverdien λ, så

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} \lambda \cdot I_{p \times p} & ? \\ 0 & ? \end{pmatrix}.$$

Det følger (som i FORELESNING E12) at

$$\det[\lambda \cdot I_{p\times p} - x \cdot I_{p \times p}] = (\lambda - x)^p$$

er en faktor i charpol(f). Det vil si $m(\lambda) \geq p = \dim E_\lambda$. $\square$

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

TEOREM I

Hvis f er diagonaliserbar, så er $\dim E_\lambda = m(\lambda)$ for hver egenverdi λ for f.

BEVIS

Anta at f er diagonaliserbar. Da finnes en ordna basis β for V som består av egenvektorer for f.

La $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ være de distinkte egenverdiene for f og la $\beta_i = \beta \cap E_{\lambda_i}$. Skriv $n_i = \#$vektorer i β_i. Da er

$$n_i \overset{(*)}{\leq} \dim E_{\lambda_i} \overset{(**)}{\leq} m(\lambda_i) \qquad \text{for hver } i.$$

Forrige PROPOSISJON

Vektorene i β_i er lineært uavhengige.

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

TEOREM I

Hvis f er diagonaliserbar, så er $\dim E_\lambda = m(\lambda)$ for hver egenverdi λ for f.

BEVIS

La $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ være de distinkte egenverdiene for f og la $\beta_i = \beta \cap E_{\lambda_i}$. Skriv $n_i = \#$vektorer i β_i. Da er

$$n_i \overset{(*)}{\leq} \dim E_{\lambda_i} \overset{(**)}{\leq} m(\lambda_i) \quad \text{for hver } i.$$

Vi får

$$\underbrace{n}_{\dim V} = \sum_{i=1}^{k} n_i \overset{(*)}{\leq} \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} \overset{(**)}{\leq} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i)}_{\deg(\mathrm{charpol}(f))} = n.$$

Dette betyr at $\sum_{i=1}^{k} \left(m(\lambda_i) - \dim E_{\lambda_i} \right) = 0$, som impliserer

$$m(\lambda_i) = \dim E_{\lambda_i}$$

for hver $1 \leq i \leq k$ (husk at $m(\lambda_i) - \dim E_{\lambda_i} \geq 0$ ved forrige PROPOSISJON). $\square$

$V \xrightarrow{f} V$
$\dim V < \infty$

TEOREM II

Anta at charpol(f) splitter. La $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ være (alle) de distinkte egenverdiene til f. Hvis

$$\boxed{\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)} \quad \text{for hver } 1 \leq i \leq k,$$

så er f diagonaliserbar.

BEVIS

La β_i være en basis for E_{λ_i}. Da er mengden

$$\beta = \beta_1 \cup \beta_2 \cup \dots \cup \beta_k$$

lineært uavhengig i V (kommer som samarbeidsoppgave).

Hvis $\dim E_{\lambda_i} = m(\lambda_i)$ for hver i, så er

$$\#\text{vektorer i } \beta = \sum_{i=1}^{k} \dim E_{\lambda_i} = \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i) = \dim V$$

(Husk BEVIS for TEOREM I).

Det vil si at β er en (ordna) basis for V, og β består av egenvektorer for f. $\square$

OPPSUMMERING

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la $f : V \longrightarrow V$ være en linear operator. La $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ være (alle) de distinkte egenverdiene til f. Da har vi:

$$f \text{ er diagonaliserbar} \iff \dim V = \dim E_{\lambda_1} + \ldots + \dim E_{\lambda_k}.$$

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

DIAGONALISERING AV MATRISER

DEFINISJON / HUSK FRA MA1201

Ei $(n \times n)$-matrise A er diagonaliserbar hvis det finnes ei inverterbar matrise Q slik at $Q^{-1}AQ$ er ei diagonal matrise.

- I ei slik matrise Q utgjør kolonnene en basis (for $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$) av egenvektorer for A.
- På plass j på diagonalen i matrisa $Q^{-1}AQ$ finner vi egenverdien for A som tilhører egenvektoren i kolonne j i Q.

FINT FAKTUM

Ei $(n \times n)$-matrise A er diagonaliserbar ← I MA1201-forstand

$\iff$

Operatoren $L_A : F^n \to F^n$ er diagonaliserbar ← Som definert over

"BEVIS"

Bruk vårt KOROLLAR fra FORELESNING V9. $\square$

EKSEMPEL $(F = \mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{charpol}(A) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ -1 & -t & 0 \\ 0 & 0 & 2-t \end{pmatrix} = (2-t)(t^2+1)$$

$\Rightarrow$ Egenverdiene til A er 2, i og $-i$

$\Rightarrow$ A er diagonaliserbar.

Egenrommene er

$$E_2 = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right); \quad E_i = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}\right); \quad E_{-i} = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}\right),$$

så $$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} \quad \text{for} \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & i & -i \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\square$