CAYLEY–HAMILTON-TEOREMET

FORELESNING V12

HUSK / MERK

La $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ være et polynom.

- For hver $\lambda \in \mathbb{R}$ blir $p(\lambda)$ også et reelt tall!

  Hvis $p(x) = x^2 + x + 1$, så blir
  $$p(5) = 5^2 + 5 + 1 = 31.$$

- For hver $(n \times n)$-matrise A blir $p(A)$ også ei $(n \times n)$-matrise!

  Hvis $p(x) = x^2 + x + 1$ og $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, så blir
  $$\begin{aligned} p(A) &= A^2 + A + I_{2\times 2} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

CAYLEY–HAMILTON-TEOREMET FOR MATRISER

TEOREM (CAYLEY – HAMILTON FOR MATRISER)

La A være ei $(n \times n)$ - matrise med karakteristisk polynom $p(x)$. Da er

$$p(A) = 0 .$$

Nullmatrisa av størrelse $(n \times n)$!

EKSEMPEL

La $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Det karakteristiske polynomet til A er

$$p(x) = \det \begin{pmatrix} x-3 & -1 \\ -1 & x-2 \end{pmatrix} = (x-3)(x-2) - 1 = x^2 - 5x + 5 .$$

CAYLEY – HAMILTON sier at $p(A) = 0$. Dette kan vi verifisere ved direkte utregning:

$$p(A) = A^2 - 5A + 5I = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

EKSEMPEL

La oss bruke CAYLEY-HAMILTON til å finne inversen til matrisa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det karakteristiske polynomet til A er

$$p(x) = \det\begin{pmatrix} 1-x & 1 & 2 \\ 9 & 2-x & 0 \\ 5 & 0 & 3-x \end{pmatrix} = -x^3 + 6x^2 + 8x - 41.$$

Da vet vi (ved CAYLEY-HAMILTON) at

$$\underbrace{0}_{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{(*)}{=} -A^3 + 6A^2 + 8A - 41\underbrace{I}_{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

EKSEMPEL (FORTS.)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

CAYLEY-HAMILTON: $0 \overset{(*)}{=} -A^3 + 6A^2 + 8A - 41I$

$$\Rightarrow \quad 41I = -A^3 + 6A^2 + 8A = A(-A^2 + 6A + 8I)$$

$$\Rightarrow \quad I = A \cdot \left(\frac{1}{41}(-A^2 + 6A + 8I)\right).$$

Det betyr at

$$A^{-1} = \frac{1}{41}(-A^2 + 6A + 8I) = \frac{1}{41}\left(-\begin{pmatrix} 20 & 3 & 8 \\ 27 & 13 & 18 \\ 20 & 5 & 19 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 9 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} + 8\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{41}\begin{pmatrix} -6 & 3 & 4 \\ 27 & 7 & -18 \\ 10 & -5 & 7 \end{pmatrix}}}$$

CAYLEY – HAMILTON-TEOREMET (18+)

TEOREM (CAYLEY – HAMILTON)

La $f: V \to V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt vektorrom V og la $p(x)$ være det karakteristiske polynomet til f. Da er

$$\boxed{p(f) = o}.$$

Null-operatoren $o: V \to V$ gitt ved $o(\bar{v}) = \bar{o}$ $\forall$ $\bar{v} \in V$.

Operatoren gitt som "polynomet p evaluert i f".
Eksplisitt, hvis
$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$,
så får vi

$$\begin{cases} p(f): V \longrightarrow V \\ \qquad \bar{v} \longmapsto a_0 \bar{v} + a_1 f(\bar{v}) + \dots + a_n f^n(\bar{v}). \end{cases}$$

Teoremet sier altså at $\boxed{p(f)(\bar{v}) = \bar{o} \quad \forall\ \bar{v} \in V}$!