EGENVERDIER OG EGENVEKTORER

FORELESNING V11

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise A er diagonal hvis

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Null på hver plass som ikke ligger på hoveddiagonalen!

HVORFOR BRY OSS?

Det er lett å finne potenser av diagonale matriser:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}$$

$\square$

DEFINISJON

Ei kvadratisk matrise A er diagonal hvis

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Null på hver plass som ikke ligger på hoveddiagonalen!

MERK

Hvis A er som i definisjonen med $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (eller $\lambda_i \in \mathbb{C}$), så er

$$A\bar{e}_i = \lambda_i \bar{e}_i$$

for hver standard basisvektor $\bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$ (eller $\bar{e}_i \in \mathbb{C}^n$).

EKSEMPEL

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_2 \bar{e}_2.$$

DEFINISJON (HUSK FRA MA1201)

La A være ei $(n \times n)$-matrise av reelle tall.

En ikke-null vektor $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ er en **egenvektor for A** hvis det finnes en $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x}.$$

En slik skalar λ kalles en **egenverdi for A**.

EKSEMPEL (FORTS.)

La

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$

Da er $A\bar{e}_i = \lambda_i \bar{e}_i$ for $i = 1,2,3$, så

- $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ og $\bar{e}_3$ er egenvektorer for A og
- λ_1, λ_2 og λ_3 er egenverdier for A. $\square$

VÅRT OPPSETT

Tenk $F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$

V er et endeligdimensjonalt vektorrom over F og $f : V \longrightarrow V$ er en linear operator.

HUSK

Valg av ordna basis β for V
$\rightsquigarrow$ $V \cong F^n$ og f er gitt ved venstre multiplikasjon med matrisa $[f]_\beta = [f]_\beta^\beta$.

VÅRT MÅL

Finn en ordna basis β for V som er slik at matrisa $[f]_\beta$ er diagonal. ("Diagonalisér" f.)

DEFINISJON

La $f: V \to V$ være en linear operator på et vektorrom V over F.

En skalar $\lambda \in F$ er en egenverdi for f hvis det finnes en $\bar{0} \neq \bar{v} \in V$ slik at

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v}.$$

En slik ikke-null vektor $\bar{v}$ kalles en egenvektor for f (tilhørende egenverdien λ).

SPESIELT

La A være ei reell $(n \times n)$-matrise. La videre $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ og $\lambda \in \mathbb{R}$.

Da har vi:

- $\bar{x}$ er en egenvektor for matrisa A

  $\Leftrightarrow$

  $\bar{x}$ er en egenvektor for operatoren L_A.

I MA1201-forstand

Som definert over

- λ er en egenverdi for matrisa A

  $\Leftrightarrow$

  λ er en egenverdi for operatoren L_A.

Husk: $\left\{ \begin{array}{llll} L_A : & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & \bar{v} & \longmapsto & A\bar{v} \end{array} \right.$

FINT FAKTUM

La $f: V \to V$ være en linear operator på et vektorrom V over F med $\dim V = n < \infty$.
La $\beta \subset V$ være en ordna basis.

Som definert over

Vektoren $\bar{v} \in V$ er en egenvektor for operatoren f (tilhørende egenverdien $\lambda \in F$).

$$\Longleftrightarrow$$

I MA1201-forstand

Vektoren $[\bar{v}]_\beta \in F^n$ er en egenvektor for matrisa $[f]_\beta$ (tilhørende egenverdien $\lambda \in F$).

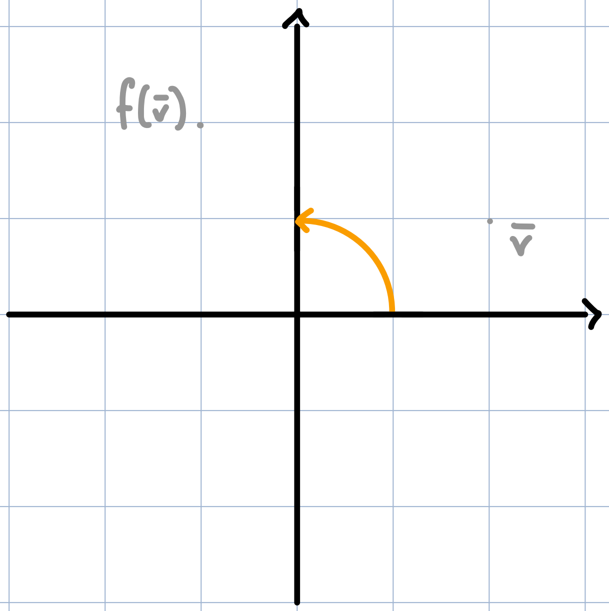
KOROLLAR fra FORELESNING E8

"BEVIS"

$$f(\bar{v}) = \lambda \bar{v} \quad \Longleftrightarrow \quad [f]_\beta \cdot [\bar{v}]_\beta = [f(\bar{v})]_\beta = [\lambda \bar{v}]_\beta = \lambda \cdot [\bar{v}]_\beta \qquad \square$$

EKSEMPEL

La $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være rotasjon om origo med $90°$ mot klokka.



Da er f en lineær operator. Det er klart at $f(\bar{v})$ **ikke** er et skalarmultiplum av $\bar{v}$ (med mindre $\bar{v} = \bar{0}$).
Altså, $f(\bar{v}) \neq \lambda \bar{v} \quad \forall \; \bar{v} \neq \bar{0}$, så f har ingen egenverdier (og ingen egenvektorer).

EKSEMPEL

La $D : \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$ være gitt ved derivasjon, $D(p) = p'$.

Hvis $p \in \mathbb{R}[x]$ er en egenvektor for D, så er

$$D(p) = p' = \lambda p \quad \text{for en } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Dette impliserer $\deg(p) = 0$ (altså $p \in \mathbb{R}$).

Altså, den eneste egenverdien for D er tallet 0, og egenvektorene er nøyaktig de ikke-null konstante polynomene.

KARAKTERISTISK POLYNOM

KONSTRUKSJON

La A være ei $n \times n$-matrise over F. Det karakteristiske polynomet til A er

$$\operatorname{charpol}(A) = \det\left[x \cdot I_{n\times n} - A\right] \in F[x].$$

EKSEMPEL

Hvis $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, så blir

$$\operatorname{charpol}(A) = \det\left[\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \det\begin{pmatrix} x & 3 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 3$$

$\square$

OBSERVASJON & MOTIVASJON

Røttene til polynomet charpol(A) er egenverdiene til A.

$\lambda \in F$ rot i $\operatorname{charpol}(A) \iff \det\left[\lambda \cdot I_{n\times n} - A\right] = 0$

$\iff (\lambda \cdot I_{n\times n} - A)\vec{v} = \vec{0}$ har en

Altså en $\vec{v} \neq \vec{0}$ slik at $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$

ikke-triviell løsning.

$\square$

MERK

La A være en $(n \times n)$-matrise.

$$A\bar{v} = x\bar{v}$$

$$x\bar{v} - A\bar{v} = \bar{0} \qquad\qquad A\bar{v} - x\bar{v} = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow$$

$$(x \cdot I_{n\times n} - A)\bar{v} = \bar{0} \qquad\qquad (A - x \cdot I_{n\times n})\bar{v} = \bar{0}$$

$$\det(x \cdot I_{n\times n} - A) \qquad\qquad \det(A - x \cdot I_{n\times n})$$

Dette er ikke noe å bekymre seg for:

$$\det(x \cdot I_{n\times n} - A) = (-1)^n \det(A - x \cdot I_{n\times n}),$$

så de to polynomene har de samme røttene.

DEFINISJON

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la $f: V \longrightarrow V$ være en lineær operator. Det karakteristiske polynomet til f er

$$\operatorname{charpol}(f) = \operatorname{charpol}([f]_\beta)$$

hvor β er en **hvilkensomhelst** ordna basis for V.

EGENSKAPER

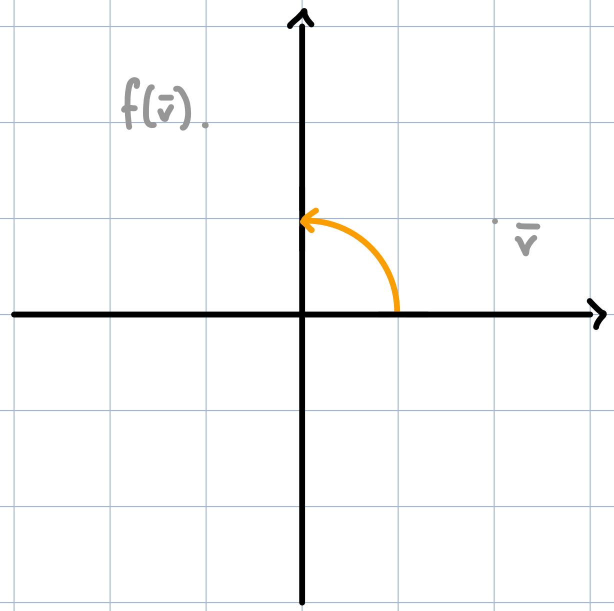
Vi får det samme resultatet uansett hvilken ordna basis β vi velger å bruke!

- Polynomet $\operatorname{charpol}(f)$ er **veldefinert**.
  [Kommer som samarbeidsoppgave.
- Røttene til $\operatorname{charpol}(f)$ er egenverdiene til f.
- $\deg(\operatorname{charpol}(f)) = \dim V$. Det følger at f har høyst $\dim V$ egenverdier.
- I $\operatorname{charpol}(f)$ har $x^{\dim V}$ koeffisient lik 1 ("$\operatorname{charpol}(f)$ er monisk").

$\square$

EKSEMPEL

La $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være rotasjon om origo med 90° mot klokka.



$f(x,y) = (-y, x)$, så hvis vi lar $\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ blir $[f]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og dermed

$\text{charpol}(f) = \det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} = x^2 + 1.$

Altså, det karakteristiske polynomet til f har ingen røtter.

Da er f en lineær operator. Det er klart at $f(\bar{v})$ **ikke** er et skalarmultiplum av $\bar{v}$ (med mindre $\bar{v} = \bar{0}$).

Altså, $f(\bar{v}) \neq \lambda \bar{v}$ $\forall$ $\bar{v} \neq \bar{0}$, så f har ingen egenverdier (og ingen egenvektorer). $\square$

EKSEMPEL

La $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2$ være gitt ved $f(x,y) = (-y, x)$. Vi får $\text{charpol}(f) = x^2 + 1$, så f har egenverdiene

$\lambda_1 = i$ og $\lambda_2 = -i$.

I en samarbeidsoppgave finner vi tilhørende egenvektorer $\square$