MA1202/6202

ANVENDELSE:

HOMOGENE LINEÆRE DIFFERENSIALLIGNINGER MED KONSTANTE KOEFFISIENTER

FORELESNING V10

OPPSETT

Vi skal løse ligninger på formen

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

hvor

- $y^{(i)}$ er den i-te deriverte av $y = y(x)$ og
- $a_0, a_1, \dots, a_n$ er konstanter.

OBSERVASJON

Hvis $a_n \neq 0$, så kan vi anta at $a_n = 1$.

Løsningene av $(*)$ er de samme som løsningene av ligninga

$$y^{(n)} + \frac{a_{n-1}}{a_n} y^{(n-1)} + \dots + \frac{a_1}{a_n} y^{(1)} + \frac{a_0}{a_n} y = 0$$

$\square$

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

VÅRT PERSPEKTIV

Tenk på løsningsmengden til $(*)$ som et vektorrom!

Men hvilket vektorrom?

- Det er beleilig å betrakte løsningene av $(*)$ som funksjoner $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$. Altså er vi i det enorme vektorrommet $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$.
- Man kan vise at enhver løsning av $(*)$ har deriverte av alle ordener. Altså trenger vi bare å lete etter løsninger i underrommet

$$C^\infty = \{ f \mid f^{(k)} \text{ eksisterer } \forall\, k \geq 0 \} \subset \mathbb{C}^{\mathbb{R}}.$$

Vi skal beskrive løsningene av $(*)$ som vektorene i kjernen til en bestemt lineær operator på C^∞!

$C^\infty = \{ f \mid f^{(k)} \text{ eksisterer } \forall k \geq 0 \}$

KONSTRUKSJON

Til ligninga $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$ knytter vi polynomet $p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$.

Vi får en linear operator på C^∞ gitt ved

$$p(D) = D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + \dots + a_1 \cdot D + a_0 \cdot id_{C^\infty}.$$

MERK

Her er $D : C^\infty \to C^\infty$ linearoperatoren gitt ved derivasjon, altså $D(f) = f'$. I uttrykket for $p(D)$ har vi at

- $+$ betyr sum av funksjoner
- $D^i = D \circ D \circ \dots \circ D$ (i kopier av D).

Altså, for hver $y = y(x) \in C^\infty$ har vi eksplisitt

$$\begin{aligned} p(D)(y) &= (D^n + a_{n-1} \cdot D^{n-1} + \dots + a_1 \cdot D + a_0 \cdot id_{C^\infty})(y) \\ &= D^n(y) + a_{n-1} \cdot D^{n-1}(y) + \dots + a_1 \cdot D(y) + a_0 \cdot id_{C^\infty}(y) \\ &= y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y^{(1)} + a_0 \cdot y. \end{aligned}$$

Har sett: $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \rightsquigarrow$ operatoren

$$\begin{cases} p(D) : C^\infty \longrightarrow C^\infty \\ \quad y \longmapsto y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y^{(1)} + a_0 \cdot y \end{cases}$$

OBSERVASJON

Mengden av alle løsninger av ligninga

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

er nøyaktig kjernen $\operatorname{Ker} p(D)$ til den lineære operatoren $p(D) : C^\infty \to C^\infty$. $\square$

DEFINISJON

Løsningsrommet til $(*)$ er vektorrommet $\operatorname{Ker} p(D) \subset C^\infty$.

NYTT MÅL

Finne en **vektorromsbasis** for $\operatorname{Ker} p(D)$!

NYTT MÅL

Finne en vektorromsbasis for $\operatorname{Ker} p(D)$!

HUSK

Ligninga $y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0$

$\rightsquigarrow$ polynomet $p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$.

TEOREM (!)

$$\dim(\operatorname{Ker} p(D)) = \deg(p(t)) \quad (= n)$$

$\square$ Beviset kommer som veiledet samarbeidsoppgave.

DET BETYR

For å finne en basis for løsningsrommet trenger vi bare å finne

n lineært uavhengige løsninger !

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM

Polynomet $p(t) = t^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ kan skrives
$p(t) = (t-c_1)\cdot(t-c_2)\cdot \dots \cdot (t-c_n)$, $c_i \in \mathbb{C}$. $\square$

HVA OM $c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$?

- Hver vektor (=funksjon) i mengden
$$\beta = \{e^{cx}, x\cdot e^{cx}, x^2 e^{cx}, \dots, x^{n-1}e^{cx}\}$$
er en løsning av $(*)$. (Sjekk dette selv!)
- β er lineært uavhengig i C^∞.
[Anta at $b_0 e^{cx} + b_1 x\cdot e^{cx} + \dots + b_n x^{n-1} e^{cx} = 0$. Da
må $b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^{n-1} = 0$, i.e. hver $b_i = 0$.]

$\Rightarrow$ β er en basis for løsningsrommet til $(*)$!

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

ALGEBRAENS FUNDAMENTALTEOREM

Polynomet $p(t) = t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$ kan skrives

$$p(t) = (t - c_1)\cdot(t - c_2)\cdot \dots \cdot (t - c_n), \quad c_i \in \mathbb{C}. \quad \square$$

HVA OM $c_i \neq c_j \ \forall \ i \neq j$?

- Hver vektor i mengden

$$\beta = \{ e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, e^{c_3 x}, \dots, e^{c_n x} \}$$

er en løsning av $(*)$. (Sjekk dette selv!)

- β er lineært uavhengig i C^∞.

[Kommer som samarbeidsoppgave.]

$\Rightarrow$ β er en basis for løsningsrommet til $(*)$!

GENERELL LØSNING

Skriv polynomet $p(t)$ knyttet til ligninga

$$y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y^{(1)} + a_0 y = 0 \qquad (*)$$

på formen $p(t) = (t - c_1)^{n_1} \cdot (t - c_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (t - c_s)^{n_s}$

med **distinkte** $c_i \in \mathbb{C}$.

Da er mengden

$$\{e^{c_1 x}, x e^{c_1 x}, \dots, x^{n_1 - 1} e^{c_1 x}, e^{c_2 x}, x e^{c_2 x}, \dots, x^{n_2 - 1} e^{c_2 x}, \dots$$

$$\dots, e^{c_s x}, x e^{c_s x}, \dots, x^{n_s - 1} e^{c_s x}\} \subset C^{\infty}.$$

en basis for løsningsrommet til $(*)$. $\square$

EKSEMPEL

Hvordan ser en generell løsning av $y'' - 5y' - 6y = 0$ ut?

Her blir $p(t) = t^2 - 5t - 6$. Dette polynomet har røttene 6 og -1, og vi kan skrive

$$p(t) = (t-6)(t-(-1))$$

I følge vår GENERELL LØSNING er $\{e^{6x}, e^{-x}\}$ en basis for løsningsrommet til ligninga. Altså, enhver løsning av $y'' - 5y' - 6y = 0$ er på formen

$$y(t) = a_1 e^{6x} + a_2 e^{-x}$$

EKSEMPEL

Hva er en generell løsning av

$$y^{(4)} - y''' - 3y'' + y' + 2y = 0 \quad ?$$

Til denne ligninga knytter vi polynomet

$$p(t) = t^4 - t^3 - 3y^2 + y + 2 .$$

Her er røttene -1 (dobbelrot), 1 og 2, slik at

$$p(t) = (t - (-1))^2 (t - 1)(t - 2) .$$

I følge vår GENERELL LØSNING er $\{ e^{-x} , xe^{-x} , e^{1x} , e^{2x} \}$ en basis for løsningsrommet til ligninga. Altså, enhver løsning av $y^{(4)} - y''' - 3y'' + y' + 2y = 0$ er på formen

$$y(t) = a_1 e^{-x} + a_2 x e^{-x} + a_3 e^{1x} + a_4 e^{2x}$$

$\square$