

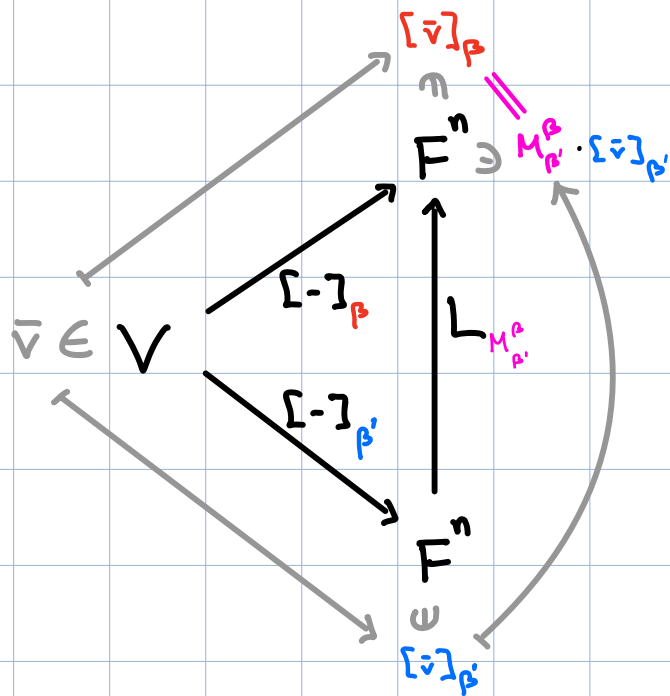
MA1202/6202

BYTTE AV BASIS

FORELESNING 19

DEFINISJON

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$,
 og la $\beta, \beta' \in V$ være to ordna basiser for V .



Er overgangsmatrise fra β' til β
 er ei $n \times n$ -matrise $M_{\beta, \beta'}$ slik at

$$M_{\beta, \beta'} \cdot [\vec{v}]_{\beta'} = [\vec{v}]_\beta \quad \forall \vec{v} \in V.$$

Er slik matrise kalles også ei
 basisbyttematrise.

PROPOSISJON I

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$,
og la $\beta, \beta' \in V$ være to ordna basiser for V .
Da er $[id_V]_{\beta'}^{\beta}$ ei basisbyttematrise fra β' til β .

BÆVIS

Vi trenger å vise at $[id_V]_{\beta'}^{\beta} \cdot [\bar{v}]_{\beta'} = [\bar{v}]_{\beta} \quad \forall \bar{v} \in V$.

Vårt KOROLLAR fra forelesning E8 sier nøyaktig dette. \square

OBSERVASJON

Basisbyttematrisa $M_{\beta'}^{\beta} = [id]_{\beta'}^{\beta}$ fra β' til β er
ei inverterbar $n \times n$ -matrise og inversmatrisa er
lik basisbyttematrisa fra β til β' , altså

$$\left(M_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} = \left([id]_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} = [id]_{\beta}^{\beta'} = M_{\beta}^{\beta'}$$

\square

PROPOSISJON I

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$,
og la $\beta, \beta' \subset V$ være to ordna basiser for V .
Da er $[id_V]_{\beta'}^{\beta}$ ei basisbyttematrise fra β' til β .

EKSPLISITT

Husk hvordan vi definerte matriserepresentasjonen av en
lineartransformasjon (KONSTRUKSJON II fra forelesning V8).
For basisbyttematrisa over får vi:

Hvis $\beta' = \{ \bar{v}'_1, \bar{v}'_2, \dots, \bar{v}'_n \}$, så er

$$[id_V]_{\beta'}^{\beta} = \left([\bar{v}'_1]_{\beta} \mid [\bar{v}'_2]_{\beta} \mid \dots \mid [\bar{v}'_n]_{\beta} \right).$$

Altså: Kolonne nummer k er k :s
koordinatvektoren til \bar{v}'_k i β .

EKSEMPEL

For vektorrommet \mathbb{R}^2 har vi ordna basiser

$$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \quad \text{og} \quad \beta' = \{(1,1), (2,1)\}.$$

Basisbyttematrisa fra β' til β er

$$M_{\beta'}^{\beta} = [\text{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\beta'}^{\beta} = \left(\begin{array}{c|c} [(1,1)]_{\beta} & [(2,1)]_{\beta} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hvis vektoren $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ har koordinatvektor $[\bar{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$

mhp. β' , så har \bar{v} følgende koordinatvektor mhp β :

$$[\bar{v}]_{\beta} = M_{\beta'}^{\beta} \cdot [\bar{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Basisbyttematrisa fra β til β' er $M_{\beta}^{\beta'} = (M_{\beta'}^{\beta})^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$

For eksempel får vi

$$M_{\beta}^{\beta'} \cdot [\bar{v}]_{\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = [\bar{v}]_{\beta'}$$



EKSEMPEL

Vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har ordna basiser

$$\beta = \{1, 1+x, 1+x+x^2\} \text{ og } \beta' = \{x, x+x^2, 2+x+x^2\}.$$

Hva er basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$?

$$M_{\beta}^{\beta'} = \left([1]_{\beta'} \mid [1+x]_{\beta'} \mid [1+x+x^2]_{\beta'} \right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$1 = a_1 x + a_2 (x+x^2) + a_3 (2+x+x^2)$$

$$1+x = b_1 x + b_2 (x+x^2) + b_3 (2+x+x^2)$$

$$1+x+x^2 = c_1 x + c_2 (x+x^2) + c_3 (2+x+x^2)$$

$$\text{Løsning: } \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$



**BASISBYTTEMATRISER OG
LINEÆRTRANSFORMASJONER**

PROPOSISJON II

La V og W være endeligdimensjonale vektorrom med $\dim V = n$ og $\dim W = m$, og la

$$\beta, \beta' \in V \quad \text{og} \quad \gamma, \gamma' \in W$$

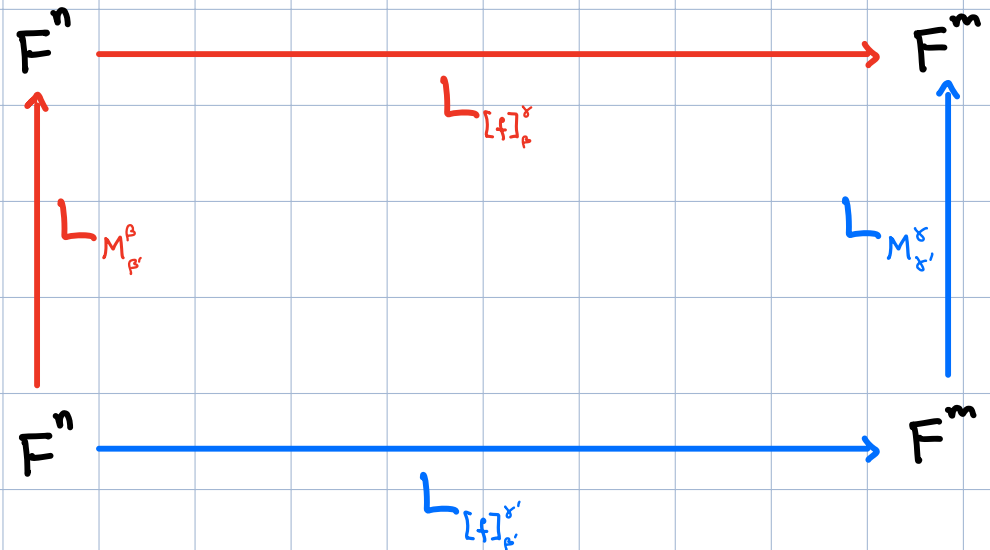
være ordna basiser. La $f: V \rightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

Da er $[f]_{\beta}^{\gamma} \cdot M_{\beta'}^{\beta} = M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'}$.

ALTSÅ

Den røde veien må være lik den blå veien, siden

$$\begin{aligned} L_{[f]_{\beta}^{\gamma}} \cdot L_{M_{\beta'}^{\beta}} &= L_{[f]_{\beta}^{\gamma} \cdot M_{\beta'}^{\beta}} \\ &= L_{M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'}} \\ &= L_{M_{\gamma'}^{\gamma}} \cdot L_{[f]_{\beta'}^{\gamma'}} \end{aligned}$$



PROPOSISJON II

La V og W være endeligdimensjonale vektorrom med $\dim V = n$ og $\dim W = m$, og la

$$\beta, \beta' \in V \quad \text{og} \quad \gamma, \gamma' \in W$$

være ordna basiser. La $f: V \rightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

Da er $[f]_{\beta}^{\gamma} \cdot M_{\beta'}^{\beta} = M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'}$.

BEVIS

$$[f]_{\beta}^{\gamma} \cdot M_{\beta'}^{\beta} = [f]_{\beta}^{\gamma} \cdot [\text{id}_V]_{\beta'}^{\beta}$$

$$= [f \circ \text{id}_V]_{\beta'}^{\gamma}$$

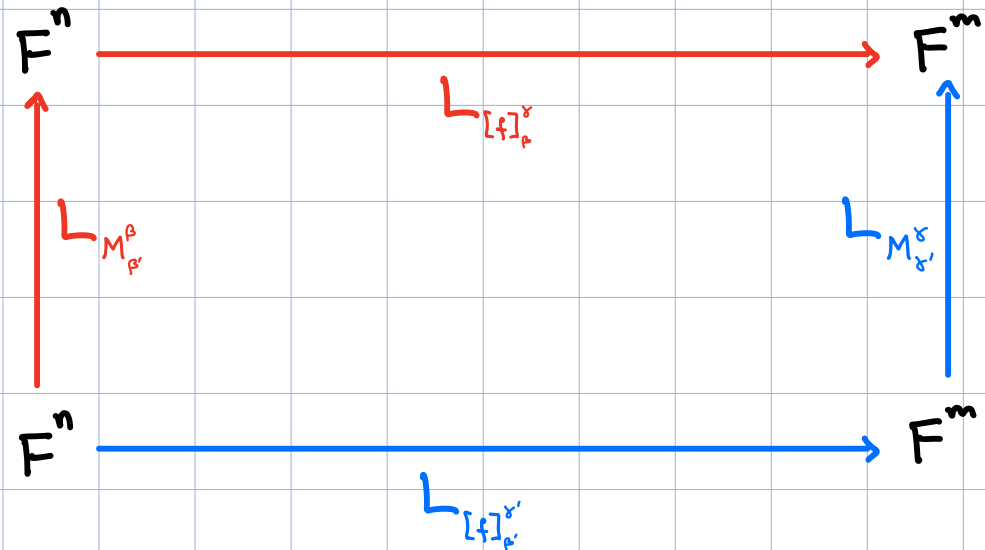
$$= [\text{id}_W \circ f]_{\beta'}^{\gamma}$$

$$= [\text{id}_W]_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'}$$

$$= M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'}$$

□

TEOREM II
fra forelesning V8



KOROLLAR

La V og W være endeligdimensjonale vektorrom med $\dim V = n$ og $\dim W = m$, og la

$$\beta, \beta' \in V \quad \text{og} \quad \gamma, \gamma' \in W$$

være ordna basiser. La $f: V \rightarrow W$ være en lineærtransformasjon.

$$\text{Da er } [f]_{\beta}^{\gamma} = M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'} \cdot M_{\beta}^{\beta'}$$

BEVIS

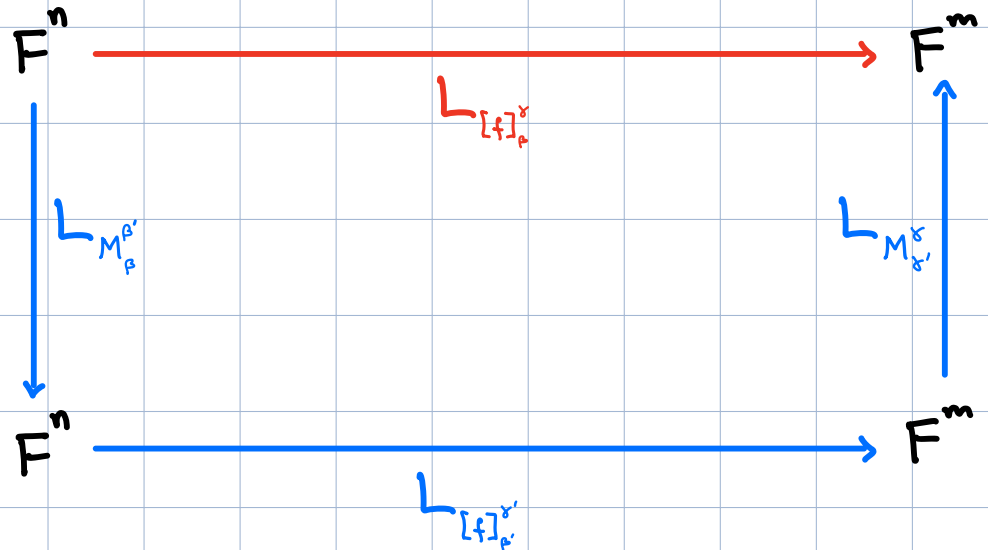
Ved PROPOSISJON II er

$$[f]_{\beta}^{\gamma} \cdot M_{\beta'}^{\beta} = M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'}$$

Det følger at

$$[f]_{\beta}^{\gamma} = M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'} \cdot (M_{\beta'}^{\beta})^{-1}$$

$$= M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'} \cdot M_{\beta}^{\beta'} \quad \square$$



EKSEMPEL

La $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære operatoren gitt ved projeksjon til xy -planet, det vil si $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. La $\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ og $\beta' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ være ordna basiser for \mathbb{R}^3 .

Vi finner $[f]_{\beta'}^{\beta'}$ "direkte":

$$\begin{aligned} [f]_{\beta'}^{\beta'} &= ([f(1, 0, 0)]_{\beta'} \mid [f(1, 1, 0)]_{\beta'} \mid [f(1, 1, 1)]_{\beta'}) \\ &= ([(1, 0, 0)]_{\beta'} \mid [(1, 1, 0)]_{\beta'} \mid [(1, 1, 0)]_{\beta'}) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

EKSEMPEL

La $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære operatoren gitt ved projeksjon til xy -planet, det vil si $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. La $\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ og $\beta' = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ være ordna basiser for \mathbb{R}^3 .

Vi finner $[f]_{\beta'}^{\beta'}$ via $[f]_{\beta}^{\beta}$:

$$\begin{aligned} \cdot [f]_{\beta}^{\beta} &= ([f(\bar{e}_1)]_{\beta} \mid [f(\bar{e}_2)]_{\beta} \mid [f(\bar{e}_3)]_{\beta}) \\ &= ([1, 0, 0]_{\beta} \mid [0, 1, 0]_{\beta} \mid [0, 0, 0]_{\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\cdot M_{\beta'}^{\beta} = [id_{\mathbb{R}^3}]_{\beta'}^{\beta} = ([1, 0, 0]_{\beta'} \mid [1, 1, 0]_{\beta'} \mid [1, 1, 1]_{\beta'}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\beta'}^{\beta'} \cdot M_{\beta'}^{\beta} = M_{\beta'}^{\beta} \cdot [f]_{\beta}^{\beta}$$

PROPOSISJON II \rightarrow

$$[f]_{\beta'}^{\beta'} = (M_{\beta'}^{\beta})^{-1} \cdot [f]_{\beta}^{\beta} \cdot M_{\beta'}^{\beta}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

