BYTTE AV BASIS

FORELESNING V9

DEFINISJON

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$, og la $\beta, \beta' \subset V$ være to ordna basiser for V.

$$
\begin{tikzcd}[row sep=large]
 & {[\bar{v}]_{\beta} = M^{\beta}_{\beta'} \cdot [\bar{v}]_{\beta'}} & \\
 & F^n & \\
\bar{v} \in V \arrow[ur, "{[-]_{\beta}}"] \arrow[dr, "{[-]_{\beta'}}"'] \arrow[uur, mapsto] \arrow[ddr, mapsto] & & \\
 & F^n \arrow[uu, "L_{M^{\beta}_{\beta'}}"'] & \\
 & {[\bar{v}]_{\beta'}} \arrow[uuuu, mapsto, bend right=60] &
\end{tikzcd}
$$

Ei **overgangsmatrise fra β' til β** er ei $n \times n$-matrise $M^{\beta}_{\beta'}$ slik at

$$M^{\beta}_{\beta'} \cdot [\bar{v}]_{\beta'} = [\bar{v}]_{\beta} \qquad \forall\, \bar{v} \in V.$$

Ei slik matrise kalles også ei **basisbyttematrise**.

PROPOSISJON I

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$, og la $\beta, \beta' \subset V$ være to ordna basiser for V.
Da er $[id_V]^{\beta}_{\beta'}$ ei basisbyttematrise fra β' til β.

BEVIS

Vi trenger å vise at $[id_V]^{\beta}_{\beta'} \cdot [\bar{v}]_{\beta'} = [\bar{v}]_{\beta}$ $\forall \bar{v} \in V$.
Vårt KOROLLAR fra forelesning E8 sier nøyaktig dette. $\square$

OBSERVASJON

Basisbyttematrisa $M^{\beta}_{\beta'} = [id]^{\beta}_{\beta'}$ fra β' til β er ei inverterbar $n \times n$-matrise og inversmatrisa er lik basisbyttematrisa fra β til β', altså

$$\left(M^{\beta}_{\beta'}\right)^{-1} = \left([id]^{\beta}_{\beta'}\right)^{-1} = [id]^{\beta'}_{\beta} = M^{\beta'}_{\beta}$$

$\square$

PROPOSISJON I

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$, og la $\beta, \beta' \subset V$ være to ordna basiser for V.
Da er $\boxed{[\mathrm{id}_V]^{\beta}_{\beta'}}$ ei basisbyttematrise fra β' til β.

EKSPLISITT

Husk hvordan vi definerte matriserepresentasjonen av en lineærtransformasjon (KONSTRUKSJON II fra forelesning V8).
For basisbyttematrisa over får vi:

Hvis $\beta' = \{ \bar{v}_1', \bar{v}_2', \ldots, \bar{v}_n' \}$, så er

$$[\mathrm{id}_V]^{\beta}_{\beta'} = \left([\bar{v}_1']_{\beta} \,\middle|\, [\bar{v}_2']_{\beta} \,\middle|\, \ldots \,\middle|\, [\bar{v}_n']_{\beta} \right).$$

Altså: Kolonne nummer k er lik koordinatvektoren til $\bar{v}_k'$ i β.

EKSEMPEL

For vektorrommet $\mathbb{R}^2$ har vi ordna basiser

$$\beta = \{(1,0),(0,1)\} \quad \text{og} \quad \beta' = \{(1,1),(2,1)\}.$$

Basisbyttematrisa fra β' til β er

$$M_{\beta'}^{\beta} = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}]_{\beta'}^{\beta} = \left([(1,1)]_\beta \;\middle|\; [(2,1)]_\beta \right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hvis vektoren $\bar{v} \in \mathbb{R}^2$ har koordinatvektor $[\bar{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mhp. β', så har $\bar{v}$ følgende koordinatvektor mhp β:

$$[\bar{v}]_\beta = M_{\beta'}^{\beta} \cdot [\bar{v}]_{\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Basisbyttematrisa fra β til β' er $M_{\beta}^{\beta'} = \left(M_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

For eksempel får vi

$$M_{\beta}^{\beta'} \cdot [\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = [\bar{v}]_{\beta'}$$

$\square$

EKSEMPEL

Vektorrommet $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har ordna basiser

$$\beta = \{1,\ 1+x,\ 1+x+x^2\} \quad \text{og} \quad \beta' = \{x,\ x+x^2,\ 2+x+x^2\}.$$

Hva er basisbyttematrisa $M_{\beta}^{\beta'}$?

$$M_{\beta}^{\beta'} = \left([1]_{\beta'} \;\middle|\; [1+x]_{\beta'} \;\middle|\; [1+x+x^2]_{\beta'} \right) = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

$$1 = a_1 x + a_2(x+x^2) + a_3(2+x+x^2)$$

$$1+x = b_1 x + b_2(x+x^2) + b_3(2+x+x^2)$$

$$1+x+x^2 = c_1 x + c_2(x+x^2) + c_3(2+x+x^2)$$

Løsning: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$ $\square$

BASISBYTTEMATRISER OG LINEÆRTRANSFORMASJONER

Proposisjon II

La V og W være endeligdimensjonale vektorrom med $\dim V = n$ og $\dim W = m$, og la

$$\beta, \beta' \subset V \quad \text{og} \quad \gamma, \gamma' \subset W$$

være ordna basiser. La $f : V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da er $[f]^{\gamma}_{\beta} \cdot M^{\beta}_{\beta'} = M^{\gamma}_{\gamma'} \cdot [f]^{\gamma'}_{\beta'}$.

Altså

Den røde veien må være lik den blå veien, siden

$$
\begin{aligned}
L_{[f]^{\gamma}_{\beta}} \cdot L_{M^{\beta}_{\beta'}} &= L_{[f]^{\gamma}_{\beta} \cdot M^{\beta}_{\beta'}} \\
&= L_{M^{\gamma}_{\gamma'} \cdot [f]^{\gamma'}_{\beta'}} \\
&= L_{M^{\gamma}_{\gamma'}} \cdot L_{[f]^{\gamma'}_{\beta'}} .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "L_{[f]^{\gamma}_{\beta}}"] & F^m \\
F^n \arrow[u, "L_{M^{\beta}_{\beta'}}"] \arrow[r, "L_{[f]^{\gamma'}_{\beta'}}"'] & F^m \arrow[u, "L_{M^{\gamma}_{\gamma'}}"']
\end{tikzcd}
$$

Proposisjon II

La V og W være endeligdimensjonale vektorrom med $\dim V = n$ og $\dim W = m$, og la

$$\beta, \beta' \subset V \quad \text{og} \quad \gamma, \gamma' \subset W$$

være ordna basiser. La $f : V \to W$ være en lineærtransformasjon.
Da er $[f]^{\gamma}_{\beta} \cdot M^{\beta}_{\beta'} = M^{\gamma}_{\gamma'} \cdot [f]^{\gamma'}_{\beta'}$.

Bevis

$$
\begin{aligned}
[f]^{\gamma}_{\beta} \cdot M^{\beta}_{\beta'} &= [f]^{\gamma}_{\beta} \cdot [\mathrm{id}_V]^{\beta}_{\beta'} \\
&= [f \circ \mathrm{id}_V]^{\gamma}_{\beta'} \\
&= [\mathrm{id}_W \circ f]^{\gamma}_{\beta'} \\
&= [\mathrm{id}_W]^{\gamma}_{\gamma'} \cdot [f]^{\gamma'}_{\beta'} \\
&= M^{\gamma}_{\gamma'} \cdot [f]^{\gamma'}_{\beta'}
\end{aligned}
$$

TEOREM II fra forelesning V8

$\square$

$$
\begin{tikzcd}
F^n \arrow[r, "L_{[f]^{\gamma}_{\beta}}"] & F^m \\
F^n \arrow[u, "L_{M^{\beta}_{\beta'}}"] \arrow[r, "L_{[f]^{\gamma'}_{\beta'}}"'] & F^m \arrow[u, "L_{M^{\gamma}_{\gamma'}}"']
\end{tikzcd}
$$

KOROLLAR

La V og W være endeligdimensjonale vektorrom med $\dim V = n$ og $\dim W = m$, og la

$$\beta, \beta' \subset V \quad \text{og} \quad \gamma, \gamma' \subset W$$

være ordna basiser. La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da er $[f]_\beta^\gamma = M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'} \cdot M_\beta^{\beta'}$.

BEVIS

Ved Proposisjon II er

$$[f]_\beta^\gamma \cdot M_{\beta'}^{\beta} = M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'}$$

Det følger at

$$[f]_\beta^\gamma = M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'} \cdot \left(M_{\beta'}^{\beta}\right)^{-1}$$

$$= M_{\gamma'}^{\gamma} \cdot [f]_{\beta'}^{\gamma'} \cdot M_\beta^{\beta'} \qquad \square$$

$$\begin{tikzcd}
F^n \arrow[rr, "L_{[f]_\beta^\gamma}"] \arrow[d, "L_{M_\beta^{\beta'}}"] & & F^m \\
F^n \arrow[rr, "L_{[f]_{\beta'}^{\gamma'}}"'] & & F^m \arrow[u, "L_{M_{\gamma'}^{\gamma}}"']
\end{tikzcd}$$

EKSEMPEL

La $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære operatoren gitt ved projeksjon til xy-planet, det vil si $f(x,y,z) = (x,y,0)$. La $\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ og $\beta' = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ være ordna basiser for $\mathbb{R}^3$.

Vi finner $[f]_{\beta'}^{\beta'}$ "direkte":

$$
\begin{aligned}
[f]_{\beta'}^{\beta'} &= \left([f(1,0,0)]_{\beta'} \;\middle|\; [f(1,1,0)]_{\beta'} \;\middle|\; [f(1,1,0)]_{\beta'} \right) \\
&= \left([(1,0,0)]_{\beta'} \;\middle|\; [(1,1,0)]_{\beta'} \;\middle|\; [(1,1,0)]_{\beta'} \right) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

EKSEMPEL

La $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være den lineære operatoren gitt ved projeksjon til xy-planet, det vil si $f(x,y,z) = (x,y,0)$. La
$$\beta = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\} \quad \text{og} \quad \beta' = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$$
være ordna basiser for $\mathbb{R}^3$.

Vi finner $[f]^{\beta'}_{\beta'}$ via $[f]^{\beta}_{\beta}$:

- $$[f]^{\beta}_{\beta} = \left([f(\bar{e}_1)]_\beta \;\middle|\; [f(\bar{e}_2)]_\beta \;\middle|\; [f(\bar{e}_3)]_\beta \right) = \left([(1,0,0)]_\beta \;\middle|\; [(0,1,0)]_\beta \;\middle|\; [(0,0,0)]_\beta \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
- $$M^{\beta}_{\beta'} = [id_{\mathbb{R}^3}]^{\beta}_{\beta'} = \left([(1,0,0)]_\beta \;\middle|\; [(1,1,0)]_\beta \;\middle|\; [(1,1,1)]_\beta \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]^{\gamma}_{\beta} \cdot M^{\beta}_{\beta'} = M^{\gamma}_{\gamma'} \cdot [f]^{\gamma'}_{\beta'} \xRightarrow{\text{Proposisjon II}} \boxed{[f]^{\beta'}_{\beta'}} = \left(M^{\beta}_{\beta'}\right)^{-1} \cdot [f]^{\beta}_{\beta} \cdot M^{\beta}_{\beta'}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$\square$