MATRISEREPRESENTASJON

FORELESNING V8

TYPISK SCENARIO I MA1201

"La M være en $m \times n$-matrise ..."

TYPISK SCENARIO I MA1202

"La V og W være endeligdimensjonale vektorrom over kroppen F ($F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$) og la $f : V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon ..."

POENGET!

Fiksér ordna basiser β for V og γ for W.

Hvis $\dim V = n$ og $\dim W = m$, så kan vi "oversette":

$$V \longleftrightarrow F^n$$

$$W \longleftrightarrow F^m$$

$$f \longleftrightarrow m \times n\text{-matrisa } [f]_\beta^\gamma$$

SENERE: Veksle mellom forskjellige ordna basiser!

KOORDINATVEKTORER

DEFINISJON

En ordna basis er en basis med en rekkefølge.

MERK

$\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ og $\{(1,0,0), (0,0,1), (0,1,0)\}$ er like som basiser for $\mathbb{R}^3$, men ikke som ordna basiser.

EKSEMPEL / DEFINISJON

For vektorrommet F^n (altså $\mathbb{R}^n$ eller $\mathbb{C}^n$) bruker vi

$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$

som vår standard ordna basis.

For vektorrommet $F[x]_{\leq n}$ (tenk $\mathbb{R}[x]_{\leq n}$ eller $\mathbb{C}[x]_{\leq n}$) er

$\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$

vår standard ordna basis. $\square$

KONSTRUKSJON I

La $\beta = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ være en ordna basis for V.
Hver $\bar{v} \in V$ kan skrives som

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \ldots + a_n\bar{v}_n$$ med entydige $a_i \in F$,

og vi lar koordinatvektoren til $\bar{v}$ i β være

$$[\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in F^n.$$

EKSEMPEL

La $p = 3 + x - 4x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. I den ordna basisen $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ har p koordinatvektor

$$[p]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$$

EKSEMPEL

La $p = 3 + x - 4x^3 \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$. I den ordna basisen $\beta = \{1, x, x^2, x^3\}$ har p koordinatvektor

$$[p]_\beta = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \left(\text{fordi } p = 3 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2 + (-4) \cdot x^3\right).$$

Med hensyn på den ordna basisen $\gamma = \{1, x^2, x^3, x\}$ har p koordinatvektor

$$[p]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \left(\text{fordi } p = 3 \cdot 1 + 0 \cdot x^2 + (-4) \cdot x^3 + 1 \cdot x\right).$$

Med hensyn på den ordna basisen $\delta = \{6, 2x^2, x, 2x^3\}$ har p koordinatvektor

$$[p]_\delta = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \quad \left(\text{fordi } p = \tfrac{1}{2} \cdot 6 + 0 \cdot 2x^2 + 1 \cdot x + 2 \cdot 2x^3\right).$$

$\square$

EKSEMPEL

La β være standardbasisen for $\mathbb{R}^n$. Da er hver $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$ lik sin egen koordinatvektor $[\bar{v}]_\beta$.

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + \dots + a_n\bar{e}_n ,$$

så $$[\bar{v}]_\beta = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$ $\square$

OBSERVASJON

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over F med ordna basis β.

Funksjonen

$$\begin{cases} [\,-\,]_\beta : V \longrightarrow F^{\dim V} \\ \qquad\quad \bar{v} \longmapsto [\bar{v}]_\beta \end{cases}$$

er en inverterbar lineærtransformasjon.

ALTSÅ

Å "ta koordinatvektor" gir en isomorfi $V \cong F^{\dim V}$

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

MATRISEREPRESENTASJON

AV LINEÆRTRANSFORMASJONER

KONSTRUKSJON II

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon og la

$\beta = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ og $\gamma = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m\} \subset W$

være ordna basiser.

Matriserepresentasjonen av f : β og γ er matrisa

$$[f]_\beta^\gamma = \left([f(\bar{v}_1)]_\gamma \;\middle|\; [f(\bar{v}_2)]_\gamma \;\middle|\; \ldots \;\middle|\; [f(\bar{v}_n)]_\gamma \right)$$

Vektorer i F^m

MERK

- $[f]_\beta^\gamma$ er ei $m \times n$-matrise over F.
- For hver $j = 1, \ldots, n$ finnes entydige skalarer

  $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj} \in F$

  slik at $f(\bar{v}_j) = a_{1j}\bar{w}_1 + a_{2j}\bar{w}_2 + \ldots + a_{mj}\bar{w}_m$. Da er matrisa $A = [f]_\beta^\gamma$ gitt ved $A_{ij} = a_{ij}$.

KONSTRUKSJON II

La $f: V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon og la

$\beta = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ og $\gamma = \{\bar{w}_1, \ldots, \bar{w}_m\} \subset W$

være ordna basiser.

Matriserepresentasjonen av f : β og γ er matrisa

$$[f]_\beta^\gamma = \Big([f(\bar{v}_1)]_\gamma \;\Big|\; [f(\bar{v}_2)]_\gamma \;\Big|\; \ldots \;\Big|\; [f(\bar{v}_n)]_\gamma \Big)$$

Vektorer i F^m

NOTASJON

Hvis $f: V \longrightarrow V$ er en lineær operator og $\beta \subset V$ er en ordna basis, så skriver mange kilder

$$[f]_\beta^\beta = [f]_\beta .$$

EKSEMPEL

La $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ være lineærtransformasjonen gitt ved $f(x,y) = (x+3y,\ 2x+5y,\ 7x+9y)$

Hva er matriserepresentasjonen $[f]_\beta^\gamma$ av f i våre standard ordna basiser

$\beta = \{(1,0), (0,1)\} \subset \mathbb{R}^2$ og $\gamma = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$?

$$f(1,0) = (1,2,7)$$
$$= 1\cdot(1,0,0) + 2\cdot(0,1,0) + 7\cdot(0,0,1) \implies [f(1,0)]_\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$
$$f(0,1) = (3,5,9)$$
$$= 3\cdot(1,0,0) + 5\cdot(0,1,0) + 9\cdot(0,0,1) \implies [f(0,1)]_\gamma = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Altså er $[f]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$. $\square$

EKSEMPEL

La $D : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ være lineærtransformasjonen gitt ved derivasjon, altså $D(p) = p'$.

Hva er matriserepresentasjonen $[D]_\beta^\gamma$ av D i de ordna basisene

$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ og $\gamma = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$?

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad [D(1)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad [D(x)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad [D(x^2)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \quad \Rightarrow \quad [D(x^3)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Altså er $\underline{\underline{[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}$.

$\square$

EKSEMPEL

La $D : \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ være lineærtransformasjonen gitt ved derivasjon, altså $D(p) = p'$.

Hva er matriserepresentasjonen $[D]_\beta^\gamma$ av D i de ordna basisene

$$\beta = \{1, x^2, x, x^3\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \quad \text{og} \quad \gamma = \{1, x, x^2\} \subset \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \text{ ?}$$

$$D(1) = 0 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \implies [D(1)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^2) = 2x = 0 \cdot 1 + 2 \cdot x + 0 \cdot x^2 \implies [D(x^2)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x) = 1 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 \implies [D(x)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D(x^3) = 3x^2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 3 \cdot x^2 \implies [D(x^3)]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Altså er

$$\underline{\underline{[D]_\beta^\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}}.$$

$\square$