ISOMORFI

FORELESNING V7

DEFINISJON

En lineærtransformasjon $f : V \to W$ er **inverterbar** hvis det finnes en lineærtransformasjon $g : W \to V$ slik at $f \circ g = id_W$ og $g \circ f = id_V$.

TERMINOLOGI

En inverterbar lineærtransformasjon kalles en **isomorfi**. V og W er **isomorfe** hvis det finnes en isomorfi mellom dem. Da skriver vi: $V \cong W$.

Hvis g som i definisjonen finnes, så kalles den en invers av f. Vi skal vise (samarbeidsoppgave) at g er entydig, så vi kan si **inversen** og skrive $g = f^{-1}$.

EKSEMPEL

La M være en $n \times n$-matrise over $\mathbb{R}$. Da er

$$\begin{cases} L_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \qquad \bar{v} \longmapsto M\bar{v} \end{cases}$$

en lineær operator. Hvis matrisa M er inverterbar, så er L_M inverterbar (vi skal snart se at også det motsatte holder).

M inverterbar $\Rightarrow \exists\, M^{-1}$ s.a. $MM^{-1} = I_{n\times n} = M^{-1}M$

$\Rightarrow L_M \circ L_{M^{-1}} = id_{\mathbb{R}^n} = L_{M^{-1}} \circ L_M$,

altså lineæroperatoren $L_{M^{-1}}$ er inversen til L_M. $\square$

EKSEMPEL

La $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være gitt ved

$$f(x,y) = (x+y, 2x-y).$$

Da er f inverterbar, fordi lineærtransformasjonen $f^{-1} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$f^{-1}(x,y) = \frac{1}{3}(x+y, 2x-y)$$

er en invers

$$(x,y) \overset{f}{\longmapsto} (x+y, 2x-y) \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \frac{1}{3}(x+y+2x-y, 2(x+y)-(2x-y))$$

$$= \frac{1}{3}(3x, 3y) = (x,y)$$

$$(x,y) \overset{f^{-1}}{\longmapsto} \frac{1}{3}(x+y, 2x-y) \overset{f}{\longmapsto} \frac{1}{3}(x+y+2x-y, 2(x+y)-(2x-y))$$

$$= (x,y)$$

$\square$

PROPOSISJON

En lineærtransformasjon er inverterbar hvis og bare hvis den er injektiv (a.k.a. "1-1") og surjektiv (a.k.a. "på").

BEVIS

La $f : V \longrightarrow W$ være lineær.

Anta at f er inverterbar. La $f^{-1} : W \rightarrow V$ være inversen til f.

f er injektiv: Det holder å vise at $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$. Så la $\bar{v} \in \operatorname{Ker} f$. Da er $f(\bar{v}) = \bar{0}$, og vi får

$$\bar{v} = id_V(\bar{v}) = (f^{-1} \circ f)(\bar{v}) = f^{-1}(f(\bar{v})) = f^{-1}(\bar{0}) = \bar{0}.$$

f er surjektiv: Vi må vise at for hver $\bar{w} \in W$ finnes $\bar{v} \in V$ slik at $\bar{w} = f(\bar{v})$. Prøv med $\bar{v} = f^{-1}(\bar{w})$:

Da blir $f(\bar{v}) = f(f^{-1}(\bar{w})) = (f \circ f^{-1})(\bar{w}) = id_W(\bar{w}) = \bar{w}$.

PROPOSISJON

En lineærtransformasjon er inverterbar hvis og bare hvis den er injektiv (a.k.a. "1-1") og surjektiv (a.k.a. "på").

BEVIS

La $f : V \longrightarrow W$ være lineær.

Anta at f er injektiv og surjektiv. Beviset for at f da er inverterbar, kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

MERK

Forrige PROPOSISJON betyr at en lineærtransformasjon $f: V \to W$ er inverterbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$ og $\operatorname{Im} f = W$.

EKSEMPEL

La $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$ være lineærtransformasjonen bestemt av

$$f(\bar{e}_i) = x^{i-1} \text{ for hver standardbasisvektor } \bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

Da er f en isomorfi:

- $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$ (opplagt)
- $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$ (mengden $\{f(\bar{e}_1), \dots, f(\bar{e}_n)\} \subseteq \operatorname{Im} f$ er lineært uavhengig, så $\dim(\operatorname{Im} f) = n = \dim(\mathbb{R}[x]_{\leq n-1})$, som impliserer $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}[x]_{\leq n-1}$) $\square$

GENERALISERT EKSEMPEL

La V og W være endeligdimensjonale vektorrom.
Hvis $\dim V = \dim W$, så er $V \cong W$ (V og W er isomorfe).

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$