MA1202/6202

FUNDAMENTALTEOREMET FOR LINEÆRTRANSFORMASJONER

FORELESNING V6

KJERNEN TIL EN LINEÆRTRANSFORMASJON

V og W er vektorrom over $\mathbb{F}$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Kjernen til f er

$$\operatorname{Ker} f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0}_W \} \subset V$$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Kjernen til f er

$$\operatorname{Ker} f = \{\bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0}_W\} \subset V$$

EKSEMPEL

La $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Da er $L_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved $L_M(\bar{v}) = M\bar{v}$ en lineærtransformasjon, og

$$\operatorname{Ker} L_M = \text{nullrommet til matrisa } M.$$

$$\left[\ \bar{v} \in \operatorname{Ker} L_M \iff M\bar{v} = \bar{0} \iff \bar{v} \in \text{nullrommet til } M \right. \qquad \square$$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. **Kjernen** til f er

$$\operatorname{Ker} f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0}_W \} \subset V$$

EKSEMPEL

Identitetsoperatoren $id_V : V \to V$ har liten kjerne, nemlig $\operatorname{Ker}(id_V) = \{\bar{0}\}$.

$$\bar{v} \in \operatorname{Ker}(id_V) \iff \underbrace{id_V(\bar{v})}_{=\,\bar{v}} = \bar{0}$$

$\square$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. **Kjernen** til f er

$$\operatorname{Ker} f = \{ \bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0}_W \} \subset V$$

EKSEMPEL

Nullavbildningen $0: V \to W$ har stor kjerne, nemlig

$$\operatorname{Ker} 0 = V.$$

$$\left[\; 0(\bar{v}) = \bar{0} \qquad \forall \; \bar{v} \in V \; \right]$$

$\square$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Kjernen til f er

$$\operatorname{Ker} f = \{\bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{0}_W\} \subset V$$

EKSEMPEL

Derivasjon gir en lineær operator $D: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, altså $D(p) = p'$ for hvert polynom p. Da er

$$\begin{aligned}\operatorname{Ker} D &= \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p' = 0\} \\ &= \{\text{konstante polynomer}\} \\ &= \mathbb{R}[x]_{\leq 0}.\end{aligned}$$

$\square$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Kjernen til f er

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\bar{v} \in V \mid f(\bar{v}) = \bar{o}_W\} \subset V$$

OBSERVASJON I

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da er kjernen $\mathrm{Ker} f \subset V$ et underrom.

BEVIS

Vi bruker selvsagt våre tre kriterier:

i) $\bar{o}_V \in \mathrm{Ker}\, f$. (f lineær $\Rightarrow f(\bar{o}_V) = \bar{o}_W$)

ii) $\bar{u}, \bar{v} \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in \mathrm{Ker}\, f$. ($f(\bar{u}+\bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) = \bar{o} + \bar{o} = \bar{o}$)

iii) $a \in F, \bar{v} \in \mathrm{Ker} f \Rightarrow a\bar{v} \in \mathrm{Ker}\, f$. ($f(a\bar{v}) = a f(\bar{v}) = a\bar{o} = \bar{o}$) $\square$

HUSK

En funksjon $\phi : X \to Y$ er injektiv (a.k.a. 1–1) hvis
$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \phi(x_1) \neq \phi(x_2)$.

TRIKS!

Hvis $f : V \to W$ er en lineærtransformasjon, så har vi:
f er injektiv $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$.

ALTSÅ:

Hvis $f(\bar{v}) = \bar{0} \Rightarrow \bar{v} = \bar{0}$,
så er f injektiv!

BEVIS

$\Rightarrow$ Anta at f er injektiv. Hvis $\bar{v} \in \operatorname{Ker} f$, får vi: $f(\bar{v}) = \bar{0} = f(\bar{0})$ som impliserer $\bar{v} = \bar{0}$, altså må $\operatorname{Ker} f = \{\bar{0}\}$.

$\Leftarrow$ Anta at f ikke er injektiv. Da finnes $\bar{u} \neq \bar{v}$ i V med $f(\bar{u}) = f(\bar{v})$. Det gir $f(\bar{u} - \bar{v}) = f(\bar{u}) - f(\bar{v}) = \bar{0}$, så $\bar{u} - \bar{v} \in \operatorname{Ker} f$ og $\bar{u} - \bar{v} \neq \bar{0}$, i.e. $\operatorname{Ker} f \neq \{\bar{0}\}$ $\square$

BILDET TIL EN LINEÆRTRANSFORMASJON

V og W er vektorrom over $\mathbb{F}$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. **Bildet** til f er

$$\operatorname{Im} f = \{ f(\bar{v}) \in W \mid \bar{v} \in V \} \subset W.$$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. **Bildet** til f er

$$\operatorname{Im} f = \{ f(\bar{v}) \in W \mid \bar{v} \in V \} \subset W.$$

EKSEMPEL

La $M \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Da er $L_M : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gitt ved $L_M(\bar{v}) = M\bar{v}$ en lineærtransformasjon, og

$$\operatorname{Im}(L_M) = \text{kolonnerommet til matrisa } M.$$

$\bar{w} \in \operatorname{Im}(L_M) \iff \exists\ \bar{v} \in \mathbb{R}^n$ s.a. $L_M(\bar{v}) = M\bar{v} = \bar{w}$

$\iff \bar{w} \in$ kolonnerommet til M. $\square$

DEFINISJON

La $f : V \to W$ være en lineærtransformasjon. **Bildet** til f er

$$\mathrm{Im}\, f = \{ f(\bar{v}) \in W \mid \bar{v} \in V \} \subset W.$$

EKSEMPEL

Identitetsfunksjonen $id_V : V \to V$ har stort bilde, nemlig $\mathrm{Im}(id_V) = V$.

$$\bar{v} = id_V(\bar{v}) \in \mathrm{Im}(id_V) \quad \forall\ \bar{v} \in V \qquad \square$$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. **Bildet** til f er

$$\operatorname{Im} f = \{ f(\bar{v}) \in W \mid \bar{v} \in V \} \subset W.$$

EKSEMPEL

Nullavbildningen $o: V \to W$ har lite bilde, nemlig

$$\operatorname{Im} o = \{\bar{o}\}.$$

$$\left[\operatorname{Im} o = \{ o(\bar{v}) \mid \bar{v} \in V \} = \{\bar{o}\}. \right. \qquad \square$$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. **Bildet** til f er

$$\operatorname{Im} f = \{ f(\bar{v}) \in W \mid \bar{v} \in V \} \subset W.$$

EKSEMPEL

Derivasjon gir en lineær operator $D: \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x]$, altså $D(p) = p'$ for hvert polynom p.

For hver $q \in \mathbb{R}[x]$ finnes en antiderivert $r \in \mathbb{R}[x]$, altså slik at $q = r' = D(r)$. Det betyr at

$$\operatorname{Im} D = \mathbb{R}[x].$$

$\square$

DEFINISJON

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. **Bildet** til f er

$$\operatorname{Im} f = \{ f(\bar{v}) \in W \mid \bar{v} \in V \} \subset W.$$

OBSERVASJON II

La $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon. Da er bildet $\operatorname{Im} f \subset W$ et underrom.

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

FUNDAMENTALTEOREMET

VI HAR NÅ SETT

$f: V \to W$ en lineærtransformasjon

Underrommet $\operatorname{Ker} f \subset V$

Underrommet $\operatorname{Im} f \subset W$

FUNDAMENTALTEOREMET

La V være endeligdimensjonalt og la $f: V \to W$ være en lineærtransformasjon.

Da er $\operatorname{Im} f$ endeligdimensjonalt og

$$\boxed{\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)}.$$

FUNDAMENTALTEOREMET

V endeligdimensjonalt $f : V \to W$ lineær
Da er $\mathrm{Im}\, f$ endeligdimensjonalt og
$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

BEVIS

$\mathrm{Ker} f$ er et underrom av V, så $\mathrm{Ker}\, f$ er endeligdimensjonalt.
La $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ være en basis for $\mathrm{Ker}\, f$ og utvid til en basis $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ for V. Da har vi $\dim V = m+n$ og $\dim(\mathrm{Ker}\, f) = m$, og vi trenger bare å vise:

- $\mathrm{Im}\, f$ er endeligdimensjonalt og
- $\dim(\mathrm{Im}\, f) = n$.

FUNDAMENTALTEOREMET
V endeligdimensjonalt $f : V \to W$ lineær
Da er $\mathrm{Im}\, f$ endeligdimensjonalt og
$\dim V = \dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f)$.

BEVIS

$\mathrm{Ker}\, f$ er et underrom av V, så $\mathrm{Ker}\, f$ er endeligdimensjonalt.
La $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ være en basis for $\mathrm{Ker}\, f$ og utvid til en basis $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ for V.

$\mathrm{Im}\, f$ er endeligdimensjonalt: La $f(\bar{v}) \in \mathrm{Im}\, f$. Da finnes skalarer $a_i, b_i \in F$ slik at

$$\bar{v} = a_1 \bar{u}_1 + \dots + a_m \bar{u}_m + b_1 \bar{v}_1 + \dots + b_n \bar{v}_n .$$

Da blir

$$f(\bar{v}) = f(\underbrace{a_1 \bar{u}_1 + \dots + a_m \bar{u}_m}_{\in \mathrm{Ker}\, f} + b_1 \bar{v}_1 + \dots + b_n \bar{v}_n)$$

$$= b_1 f(\bar{v}_1) + \dots + b_n f(\bar{v}_n) .$$

Dette viser at $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{span}(f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n))$, så $\mathrm{Im}\, f$ er endeligdimensjonalt.

FUNDAMENTALTEOREMET

V endeligdimensjonalt $f: V \to W$ lineær

Da er $\operatorname{Im} f$ endeligdimensjonalt og

$\dim V = \dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f)$.

BEVIS

$\operatorname{Ker} f$ er et underrom av V, så $\operatorname{Ker} f$ er endeligdimensjonalt.

La $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$ være en basis for $\operatorname{Ker} f$ og utvid til en basis $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n$ for V.

$\dim(\operatorname{Im} f) = n$: Vi har vist at $\operatorname{Im} f = \operatorname{span}(f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n))$, så det holder å vise at $\{f(\bar{v}_1), \dots, f(\bar{v}_n)\}$ er lineært uavhengig (da blir jo dette en basis for $\operatorname{Im} f$).

Anta at $\bar{0} = c_1 f(\bar{v}_1) + \dots + c_n f(\bar{v}_n)$. Da er $\bar{0} = f(c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n)$, altså $c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n \in \operatorname{Ker} f$. Men da finnes skalarer $d_1, \dots, d_m \in F$ slik at

(*) $c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n = d_1\bar{u}_1 + \dots + d_m\bar{u}_m$.

Men $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ er lineært uavhengig, så (*) impliserer $c_1 = \dots = c_n = 0$ $(= d_1 = \dots = d_m)$ $\square$