LINEÆRTRANSFORMASJONER

FORELESNING V5

V og W er vektorrom over F

DEFINISJON

En **lineartransformasjon** fra V til W er en funksjon $f : V \longrightarrow W$ slik at

$$f(\bar{u} + \bar{v}) = f(\bar{u}) + f(\bar{v}) \qquad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$$

Foregår : V

Foregår : W

$$f(a\bar{v}) = a\, f(\bar{v}) \qquad \forall\, \bar{v} \in V,\ a \in F$$

En lineartransformasjon $V \longrightarrow V$ kalles en **linear operator**.

EKSEMPEL

Identitetsfunksjonen $id_V : V \longrightarrow V$ gitt ved $id_V(\bar{v}) = \bar{v} \ \forall \ \bar{v} \in V$ er en lineærtransformasjon.

$$\begin{cases} id_V(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{u}+\bar{v} = id_V(\bar{u}) + id_V(\bar{v}) \\ id_V(a\bar{v}) = a\bar{v} = a\, id_V(\bar{v}) \end{cases}$$

EKSEMPEL

Nullfunksjonen $0 : V \longrightarrow W$ gitt ved $0(\bar{v}) = \bar{0} \ \forall \ \bar{v} \in V$ er lineær.

$$\begin{cases} 0(\bar{u}+\bar{v}) = \bar{0} = \bar{0}+\bar{0} = 0(\bar{u}) + 0(\bar{v}) \\ 0(a\bar{v}) = \bar{0} = a\bar{0} = a\, 0(\bar{v}) \end{cases}$$

EKSEMPEL

La M være en $m \times n$-matrise over $\mathbb{R}$. Da er

$$\begin{cases} L_M : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ \qquad \bar{v} \longmapsto M\bar{v} \end{cases}$$

en lineærtransformasjon.

Vi husker fra MA1201 at

- $L_M(\bar{u}+\bar{v}) = M(\bar{u}+\bar{v}) = M\bar{u} + M\bar{v} = L_M(\bar{u}) + L_M(\bar{v})$
- $L_M(a\bar{v}) = M(a\bar{v}) = aM\bar{v} = aL_M(\bar{v})$

EKSEMPEL

Projeksjon er en lineærtransformasjon, for eksempel

$$\begin{cases} \pi : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (x_1, x_3). \end{cases}$$

Vi sjekker enkelt at

$$\begin{aligned} &\pi((x_1, x_2, x_3, x_4) + (y_1, y_2, y_3, y_4)) \\ &= \pi((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4)) \\ &= (x_1+y_1, x_3+y_3) \\ &= (x_1, x_3) + (y_1, y_3 \\ &= \pi((x_1, x_2, x_3, x_4)) + \pi((y_1, y_2, y_3, y_4)). \end{aligned}$$

Det er like enkelt å sjekke at $\pi(a\bar{v}) = a\pi(\bar{v})$.

EKSEMPEL

Derivasjon er en lineærtransformasjon, for eksempel i form av

$$\begin{cases} D: & \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R}[x] \\ & p \longmapsto p' \end{cases}$$

Vi vet fra analysen at

- $D(p+q) = (p+q)' = p' + q' = D(p) + D(q)$
- $D(ap) = (ap)' = ap' = aD(p)$

EKSEMPEL

Integrasjon er en lineærtransformasjon, for eksempel i form av

$$\begin{cases} T: & \mathbb{R}[x] \longrightarrow \mathbb{R} \\ & p \longmapsto \int_{-1}^{1} p(x)\,dx \end{cases}$$

Vi vet fra analysen at

$$\cdot\ T(p+q) = \int_{-1}^{1} (p(x)+q(x))\,dx = \int_{-1}^{1} p(x)\,dx + \int_{-1}^{1} q(x)\,dx$$

$$= T(p) + T(q)$$

$$\cdot\ T(ap) = \int_{-1}^{1} ap(x)\,dx = a\int_{-1}^{1} p(x)\,dx = aT(p)$$

TEOREM

La $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ være en basis for V og la $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \ldots, \bar{w}_n \in W$ være vilkårlige. Det eksisterer nøyaktig en lineærtransformasjon $f: V \longrightarrow W$ slik at

$$f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \quad \forall \; i = 1, \ldots, n.$$

MED ANDRE ORD

Enhver lineærtransformasjon er entydig bestemt av hvordan den virker på en basis!

TEOREM

La $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ være en basis for V og la $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n \in W$ være vilkårlige. Det eksisterer nøyaktig en lineærtransformasjon $f: V \longrightarrow W$ slik at

$$f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \qquad \forall \; i = 1, \dots, n.$$

BEVIS

f eksisterer: Definér $f: V \to W$ ved $f(\overbrace{c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n}^{(*)}) = c_1\bar{w}_1 + \dots + c_n\bar{w}_n$.

Det er klart at $f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \;\; \forall i$. La oss vise at f er lineær:

La $\bar{u}, \bar{v} \in V$. Da er $\bar{u} \overset{(*)}{=} a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$; $\bar{v} \overset{(*)}{=} b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n$, så

$$\begin{aligned} f(\bar{u} + \bar{v}) &= f((a_1 + b_1)\bar{v}_1 + \dots + (a_n + b_n)\bar{v}_n) \\ &= (a_1 + b_1)\bar{w}_1 + \dots + (a_n + b_n)\bar{w}_n \\ &= (a_1\bar{w}_1 + \dots + a_n\bar{w}_n) + (b_1\bar{w}_1 + \dots + b_n\bar{w}_n) \\ &= f(\bar{u}) + f(\bar{v}). \end{aligned}$$

(*) Hver vektor i V er på denne formen med entydige $c_i \in F$!

TEOREM

La $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n\}$ være en basis for V og la $\bar{w}_1, \bar{w}_2, \dots, \bar{w}_n \in W$ være vilkårlige. Det eksisterer nøyaktig en lineærtransformasjon $f: V \longrightarrow W$ slik at

$$f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \qquad \forall \quad i = 1, \dots, n.$$

BEVIS

f eksisterer: Definér $f: V \to W$ ved $f(\overbrace{c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n}^{(*)}) = c_1\bar{w}_1 + \dots + c_n\bar{w}_n$.

Det er klart at $f(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \ \forall i$. La oss vise at f er lineær:

For $a \in F$ og $\bar{u} \overset{(*)}{=} a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n \in V$ blir

$$\begin{aligned} f(a\bar{u}) &= f(aa_1\bar{v}_1 + \dots + aa_n\bar{v}_n) \\ &= aa_1\bar{w}_1 + \dots + aa_n\bar{w}_n \\ &= a(a_1\bar{w}_1 + \dots + a_n\bar{w}_n) \\ &= a f(\bar{u}). \end{aligned}$$

(*) Hver vektor : V er på denne formen med entydige $c_i \in F$!

f er entydig: La $g: V \to W$ være en lineærtransformasjon med $g(\bar{v}_i) = \bar{w}_i \quad \forall\ i = 1, \ldots, n$. Da blir

g er
lineær

$$
\begin{aligned}
g(\bar{v}) &= g(b_1\bar{v}_1 + \ldots + b_n\bar{v}_n) \\
&= g(b_1\bar{v}_1) + \ldots + g(b_n\bar{v}_n) \\
&= b_1 g(\bar{v}_1) + \ldots + b_n g(\bar{v}_n) \\
&= b_1 \bar{w}_1 + \ldots + b_n \bar{w}_n \\
&= f(\bar{v})
\end{aligned}
$$

for hver $\bar{v} \in V$, altså $f = g$. $\square$

VEKTORROMMET AV LINEÆRTRANSFORMASJONER

V og W er vektorrom over F

HUSK

La $f, g : V \to W$ være lineærtransformasjoner. Da er

$$f+g : V \to W$$

funksjonen gitt ved $(f+g)(\bar{v}) = f(\bar{v}) \overset{\text{addisjon i } W}{+} g(\bar{v}) \quad \forall \ \bar{v} \in V$.

La $a \in F$. Da er funksjonen

$$af : V \to W$$

gitt ved $(af)(\bar{v}) = a \overset{\text{skalarmultiplikasjon i } W}{\cdot} f(\bar{v}) \quad \forall \ \bar{v} \in V$.

KONSTRUKSJON

Se på mengden

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) = \{ f : V \to W \mid f \text{ er lineærtransformasjon} \}.$$

Dette blir et vektorrom!

V og W er vektorrom over F

PROPOSISJON

Mengden

$$\mathrm{Hom}_F(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ er en lineærtransformasjon}\}$$

blir et F-vektorrom med addisjonen og skalarmultiplikasjonen fra over.

BEVIS

$\mathrm{Hom}_F(V, W)$ er en delmengde av vektorrommet

$$W^V = \{f : V \to W \mid f \text{ er en funksjon}\}.$$

Vi skal vise at $\mathrm{Hom}_F(V, W) \subset W^V$ er et underrom.

PROPOSISJON

$\mathrm{Hom}_F(V, W)$
$= \{ f : V \to W \mid f \text{ lineær} \}$
blir et F-vektorrom.

BEVIS

$\mathrm{Hom}_F(V, W) \subset W^V$ er et underrom:
Vi bruker de berømte tre kriteriene
(PROPOSISJON I fra V2).

i) Nullfunksjonen $0 : V \to W$ er lineær.

PROPOSISJON

$\mathrm{Hom}_F(V, W)$
$= \{ f : V \to W \mid f \text{ linear} \}$
blir et F-vektorrom.

BEVIS

$\mathrm{Hom}_F(V, W) \subset W^V$ er et underrom:
Vi bruker de berømte tre kriteriene
(**PROPOSISJON I** fra V2).

ii) La $f, g \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$ (altså f og g er begge lineærtransformasjoner $V \to W$).
Da er også funksjonen $f+g : V \to W$ en lineærtransformasjon:

$$\begin{aligned}(f+g)(\bar{u}+\bar{v}) &= f(\bar{u}+\bar{v}) + g(\bar{u}+\bar{v}) \\ &= f(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{u}) + g(\bar{v}) \\ &= f(\bar{u}) + g(\bar{u}) + f(\bar{v}) + g(\bar{v}) \\ &= (f+g)(\bar{u}) + (f+g)(\bar{v}) \quad \forall\ \bar{u}, \bar{v} \in V\end{aligned}$$

PROPOSISJON

$\mathrm{Hom}_F(V, W)$
$= \{ f : V \to W \mid f \text{ lineær} \}$
blir et F-vektorrom.

BEVIS

$\mathrm{Hom}_F(V, W) \subset W^V$ er et underrom:
Vi bruker de berømte tre kriteriene
(PROPOSISJON I fra V2).

ii) La $f, g \in \mathrm{Hom}_F(V, W)$ (altså f og g er begge lineærtransformasjoner $V \to W$).
Da er også funksjonen $f+g : V \to W$ en lineærtransformasjon:

✓ $(f+g)(\bar{u}+\bar{v}) = (f+g)(\bar{u}) + (f+g)(\bar{v}) \quad \forall\, \bar{u}, \bar{v} \in V$

$$
\begin{aligned}
(f+g)(a\bar{v}) &= f(a\bar{v}) + g(a\bar{v}) \\
&= a f(\bar{v}) + a g(\bar{v}) \\
&= a\,(f(\bar{v}) + g(\bar{v})) = a(f+g)(\bar{v}).
\end{aligned}
$$

PROPOSISJON

$\mathrm{Hom}_F(V, W) = \{f : V \to W \mid f \text{ linear}\}$ blir et F-vektorrom.

BEVIS

$\mathrm{Hom}_F(V, W) \subset W^V$ er et underrom:
Vi bruker de berømte tre kriteriene
(PROPOSISJON I fra V2).

iii) Vi må sjekke at funksjonen $af : V \to W$ er en lineærtransformasjon for hver skalar $a \in F$ og hver lineærtransformasjon $f : V \to W$.

Dette kommer som en samarbeidsoppgave. $\square$