MA1202/6202

BASIS OG DIMENSJON

FORELESNING V4

V er et vektorrom over F

DEFINISJON

En basis for V er en lineært uavhengig delmengde som utspenner V.

EKSEMPEL

Mengden

$$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$$

er en basis for $\mathbb{R}^n$ $\square$

EKSEMPEL

Mengden

$$\{(1,0), (0,1)\}$$

er en basis for $\mathbb{R}^2$.

Mengdene $\{(1,2), (3,5)\}$ og $\{(7,5), (-4,9)\}$ er også basiser for $\mathbb{R}^2$! $\square$

EKSEMPEL

Mengden

$$\{1, x, x^2, x^3\}$$

er en basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

Mengden

$$\{4, 3x, 2x^2, x^3\}$$

er også en basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 3}$! $\square$

OBSERVASJON

En delmengde $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ er en basis for V

$\Longleftrightarrow$

hver $\bar{v} \in V$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$$

på en entydig måte.

BEVIS

$\Rightarrow$: Anta at B er en basis. Da er $\operatorname{span}(B) = V$, så hver $\bar{v} \in V$ kan skrives som

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n .$$

For å vise entydighet, anta at

$$\bar{v} = b_1\bar{v}_1 + \dots + b_n\bar{v}_n .$$

Da blir $\bar{0} = \bar{v} - \bar{v} = (a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \dots + (a_n - b_n)\bar{v}_n$, som gir $a_i = b_i \; \forall i$ siden B er lineært uavhengig.

OBSERVASJON

En delmengde $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$ er en basis for V

$\Leftrightarrow$

hver $\bar{v} \in V$ kan skrives som en lineærkombinasjon

$$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$$

på en entydig måte.

BEVIS

$\Leftarrow$: Anta at hver $\bar{v} \in V$ kan skrives som

$\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + \dots + a_n\bar{v}_n$ med entydige $a_i \in F$.

Da er span$(B) = V$. For å vise at B også er lineært uavhengig, anta at

$$\bar{0} = c_1\bar{v}_1 + \dots + c_n\bar{v}_n .$$

Siden vi også har $\bar{0} = 0\bar{v}_1 + \dots + 0\bar{v}_n$ betyr dette at $c_i = 0 \; \forall i$, så B er lineært uavhengig. $\square$

TEOREM (!)

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom.

i) V har en endelig basis

ii) Alle basiser for V har like mange elementer.

PROPOSISJON I

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la $S = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ være en delmengde.

i) Hvis S utspenner V, så kan S reduseres til en basis for V.

ii) Hvis S er lineært uavhengig, så kan S utvides til en basis for V.

PROPOSISJON

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la $S = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ være en delmengde.

i) Hvis S utspenner V, så kan S reduseres til en basis for V.

BEVIS FOR i)

Anta at $\text{span}(S) = V$. Følgende prosedyre reduserer S til en basis for V:

STEG 1: Hvis $\bar{v}_1 = \bar{0}$, fjern $\bar{v}_1$ fra S.
Hvis $\bar{v}_1 \neq \bar{0}$, la S være uendret.

STEG i: Hvis $\bar{v}_i \in \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1})$, fjern $\bar{v}_i$ fra S.
Hvis $\bar{v}_i \notin \text{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_{i-1})$, la S være uendret.

Etter n steg har vi en ny liste S.

- S utspenner fortsatt V (vi har kun fjernet vektorer som allerede lå i underrommet utspent av de foregående).
- S er lineært uavhengig (ingen vektor i S ligger i underrommet utspent av de andre vektorene i S).

PROPOSISJON I

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom og la $S = \{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ være en delmengde.

i) Hvis S utspenner V, så kan S reduseres til en basis for V.

ii) Hvis S er lineært uavhengig, så kan S utvides til en basis for V.

BEVIS FOR ii)

Dette kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

BEVIS FOR "TEOREM (!)"

TEOREM (!)
La V være et endeligdimensjonalt vektorrom.
i) V har en endelig basis
ii) Alle basiser for V har like mange elementer.

i): Opplagt korollar av PROPOSISJON I.

ii): La $B_1 = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\}$ og $B_2 = \{\bar{w}_1, \dots, \bar{w}_m\}$ være basiser for V.

Følger av LEMMA I & LEMMA II fra Forelesning E3

· Siden B_1 er lineært uavhengig i V og B_2 utspenner V, må $n \leq m$

· Siden B_2 er lineært uavhengig i V og B_1 utspenner V, må $m \leq n$

Altså må $m = n$. $\square$

DIMENSJON

DEFINISJON (!)

Dimensjonen til et endeligdimensjonalt vektorrom V er antallet elementer i en basis for V.

Vi skriver **$\dim V$** for dette tallet.

EKSEMPEL

Basisen
$$\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$
for $\mathbb{R}^n$ inneholder n elementer, så $\dim \mathbb{R}^n = n$. $\square$

EKSEMPEL

Basisen
$$\{1, x, x^2, \dots, x^n\} \subset F[x]_{\leq n}$$
for $F[x]_{\leq n}$ inneholder $n+1$ elementer, så $\dim F[x]_{\leq n} = n+1$. $\square$

ADVARSEL

Mengden $\mathbb{C}$ av komplekse tall er et vektorrom over seg selv, men også over $\mathbb{R}$.

- Som $\mathbb{C}$-vektorrom har $\mathbb{C}$ basisen $\{1\}$.
  Vi skriver
  $$\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1.$$

- Som $\mathbb{R}$-vektorrom har $\mathbb{C}$ basisen $\{1, i\}$.
  Vi skriver
  $$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

Å GJENKJENNE BASISER

PROPOSISJON II

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$, og la $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$.

i) Hvis B er lineært uavhengig så er B en basis for V.

ii) Hvis B utspenner V så er B en basis for V.

BEVIS

i) Anta at B er lineært uavhengig. Fra vår PROPOSISJON I vet vi at B kan utvides til en basis for V. Men enhver basis for V har nøyaktig n elementer, så denne "utvidelsen" av B er triviell, i.e. B er allerede en basis for V.

PROPOSISJON II

La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med $\dim V = n$, og la $B = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n\} \subset V$.

i) Hvis B er lineært uavhengig så er B en basis for V.

ii) Hvis B utspenner V så er B en basis for V.

BEVIS

ii) Kommer som en samarbeidsoppgave. $\square$

EKSEMPEL

Er $\{(5,7),(4,3)\} \subset \mathbb{R}^2$ en basis for $\mathbb{R}^2$?

JA! $(5,7)$ er ikke et skalarmultiplum av $(4,3)$, så mengden er lineært uavhengig. Siden mengden består av 2 elementer og $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, følger det fra PROPOSISJON II at dette er en basis.