MA1202/6202

LINEÆRKOMBINASJONER OG LINEÆR (U)AVHENGIGHET

FORELESNING V3

V er et vektorrom over F

DEFINISJON

En **lineærkombinasjon** av vektorene $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n \in V$ er et uttrykk på formen

$$a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n \in V \qquad \text{med } a_i \in F$$

Hvis $S \subset V$ er en delmengde, så er

$$\text{span}(S) = \{a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n \mid a_i \in F, \bar{v}_i \in S\} \subset V$$

altså span(S) er "mengden av alle lineærkombinasjoner av vektorer i S".

MERK

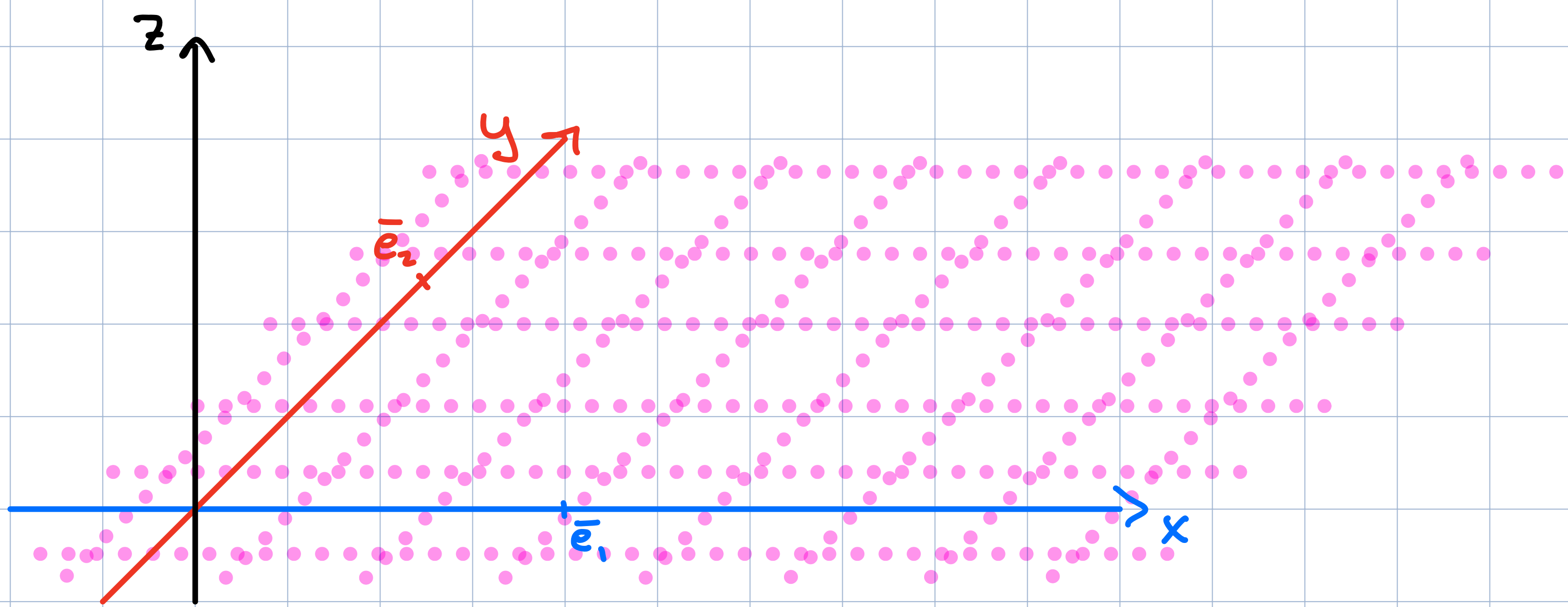
- Mengden S kan inneholde uendelig mange vektorer, men en lineærkombinasjon er en endelig sum.

- Vi bruker konvensjonen $\text{span}(\emptyset) = \{\bar{0}\}$.

EKSEMPEL

I $\mathbb{R}^3$ har vi: $\bar{e}_1 = (1,0,0)$ og $\bar{e}_2 = (0,1,0)$. Her blir

$$\operatorname{span}(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = \{ a_1 \cdot (1,0,0) + a_2 \cdot (0,1,0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$
$$= \{ (a_1, a_2, 0) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$
$$= \text{xy-planet}$$



$\square$

EKSEMPEL

I vektorrommet $\mathbb{R}[x]$ har vi vektorene

$$f = x^2+1 \quad , \quad g = x+5 \quad , \quad h = x+4 .$$

Her blir

$$\operatorname{span}(f,g,h) = \{ a_1 f + a_2 g + a_3 h \mid a_i \in \mathbb{R} \}$$

$$= \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$$

Denne likheten skal vi vise som en samarbeidsoppgave.

$\square$

EKSEMPEL

Se på vektorene $\bar{u} = (2, 1, -3)$ og $\bar{v} = (1, -2, 4)$ i $\mathbb{R}^3$.

Er det sant at $(10, -5, 4) \in \text{span}(\bar{u}, \bar{v})$?

JA! Fordi: $(10, -5, 4) = 3 \cdot \bar{u} + 4 \cdot \bar{v}$.

EKSEMPEL

Se på vektorene $\bar{u} = (2,1,-3)$ og $\bar{v} = (1,-2,4)$ i $\mathbb{R}^3$.

Er det sant at $(17,-4,5) \in \text{span}(\bar{u}, \bar{v})$?

NEI! Fordi det finnes ingen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ slik at
$$(17,-4,5) = a_1\bar{u} + a_2\bar{v}.$$

Med andre ord, ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2a_1 + a_2 &= 17 \\ a_1 - 2a_2 &= -4 \\ -3a_1 + 4a_2 &= 5 \end{aligned}$$

har ingen løsning. $\square$

PROPOSISJON

Mengden span(S) er det minste underrommet av V som inneholder S.

BEVIS

Vi må vise:

1) span$(S) \subset V$ er et underrom.

2) span(S) inneholdder S og er det minste underrommet av V som har den egenskapen.

PROPOSISJON

Mengden span(S) er det minste underrommet av V som inneholder S.

BEVIS

1) span(S) $\subset V$ er et underrom:

Vi bruker PROPOSISJON I fra Forelesning 2:

i) span(S) inneholder $\bar{0}$ fordi $\bar{0} = 0 \cdot \bar{w} \in \text{span}(S) \ \forall \bar{w} \in S$.

ii) span(S) er lukket under addisjon fordi summen av to linearkombinasjoner er en ny linearkombinasjon

iii) span(S) er lukket under skalarmultiplikasjon fordi for hver $\bar{w} = a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n \in \text{span}(S)$ og $a \in F$ blir $a \cdot \bar{w} = a \cdot a_1\bar{v}_1 + \ldots + a \cdot a_n\bar{v}_n \in \text{span}(S)$

PROPOSISJON

Mengden span(S) er det minste underrommet av V som inneholder S.

BEVIS

2) span(S) inneholder S og er det minste underrommet av V som har den egenskapen:

span(S) inneholder S fordi: $\vec{w} = 1 \cdot \vec{w} \in \text{span}(S) \ \forall \ \vec{w} \in S$.

Hvis $W \subset V$ er et underrom som inneholder S, så må W inneholde span(S) fordi: W er lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon. Altså er span(S) minimalt slik proposisjonen påstår $\square$

TERMINOLOGI

For hver delmengde $S \subset V$ sier vi at

- $\text{span}(S)$ er underrommet utspent eller generert av S, og at
- S genererer eller utspenner underrommet $\text{span}(S)$.

DEFINISJON

Et vektorrom kalles

- endeligdimensjonalt hvis det er utspent av en endelig delmengde, og
- uendeligdimensjonalt hvis det ikke er endeligdimensjonalt.

EKSEMPEL

Vektorrommet $\mathbb{R}^n$ er endeligdimensjonalt.

($\mathbb{R}^n$ er utspent av den endelige mengden $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$.) $\square$

EKSEMPEL

Vektorrommet $F[x]_{\leq n}$ er endeligdimensjonalt

($F[x]_{\leq n}$ er utspent av den endelige mengden $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n\}$.) $\square$

EKSEMPEL

Vektorrommet $F[x]$ er uendeligdimensjonalt.

(Dette kommer som samarbeidsoppgave.) $\square$

LINEÆR (U)AVHENGIGHET

DEFINISJON

En delmengde $S \subset V$ er

- lineært avhengig hvis vi kan skrive

$$\bar{0} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \dots + a_n\bar{v}_n$$

for $\bar{v}_i \in S$ og $a_i \in F$ med minst én $a_i \neq 0$.

- lineært uavhengig hvis den ikke er lineært avhengig

EKSEMPEL

I vektorrommet $\mathbb{R}^3$ er delmengden
$$\{(1,0,0), (0,1,0), (1,1,0)\}$$
lineært avhengig!

Vi kan skrive $(0,0,0) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) - 1\cdot(1,1,0)$ $\square$

EKSEMPEL

I vektorrommet $\mathbb{R}[x]$ er delmengden
$$\{x+1, 2x, 1\}$$
lineært avhengig!

Vi kan skrive $0 = 2\cdot(x+1) - 1\cdot 2x - 2\cdot 1$ $\square$

EKSEMPEL

I vektorrommet $\mathbb{R}[x]$ er delmengden

$$\{x^2+1,\ 2x,\ 1\}$$

lineært uavhengig!

[Dette kommer som en samarbeidsoppgave.] $\square$

OBSERVASJON

Hvis $S \subset V$ er en lineært uavhengig delmengde, så kan hver vektor i span(S) skrives som en lineærkombinasjon av vektorer i S på en entydig måte.

BEVIS

La $\bar{v} \in \text{span}(S)$. Per definisjon finnes $\bar{v}_i \in S$ og $a_i \in F$ slik at $\bar{v} = a_1\bar{v}_1 + a_2\bar{v}_2 + \ldots + a_n\bar{v}_n$.
Anta at også $\bar{v} = b_1\bar{v}_1 + b_2\bar{v}_2 + \ldots + b_n\bar{v}_n$ med $b_i \in F$.
Da blir

$$\bar{0} = \bar{v} - \bar{v} = (a_1\bar{v}_1 + \ldots + a_n\bar{v}_n) - (b_1\bar{v}_1 + \ldots + b_n\bar{v}_n)$$
$$= (a_1 - b_1)\bar{v}_1 + \ldots + (a_n - b_n)\bar{v}_n .$$

Når S er lineært uavhengig impliserer dette at $a_i - b_i = 0$, altså $a_i = b_i$, for hver i. $\square$

KOROLLAR

La $S \subset V$ være en delmengde. Hvis det finnes en $\bar{v} \in S$ som er slik at

$$\bar{v} \in \operatorname{span}(S \setminus \{\bar{v}\}),$$

så er S lineært avhengig.

BEVIS

Dette kommer som en samarbeidsoppgave. $\square$