MA1202/6202

UNDERROM OG POLYNOMER

FORELESNING V2

F er en kropp
(tenk på $F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$)

DEFINISJON

En delmengde U av et vektorrom V er et **underrom** hvis U selv blir et vektorrom (med de samme operasjonene som V).

PROPOSISJON I

En delmengde U av et vektorrom er et underrom **hvis og bare hvis** vi har

i) $\bar{0} \in U$,

ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in U$ og

iii) $a \in F,\ \bar{u} \in U \Rightarrow a\bar{u} \in U$

BEVIS

Kommer som samarbeidsoppgave. $\square$

i) $\bar{o} \in U$,
ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in U$
iii) $a \in F$, $\bar{u} \in U \Rightarrow a\bar{u} \in U$

EKSEMPEL

La oss bevise at delmengden

$$U = \{(x,y,z) \mid x+2y+3z=0\} \subset \mathbb{R}^3$$

er et underrom. Vi bruker vår PROPOSISJON I:

i) $\bar{o} \in U$,

$$\bar{o} = (0,0,0) \quad \text{og} \quad 0+2\cdot 0+3\cdot 0 = 0.$$

i) $\bar{0} \in U$,
ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u}+\bar{v} \in U$
iii) $a \in F$, $\bar{u} \in U \Rightarrow a\bar{u} \in U$

EKSEMPEL

La oss bevise at delmengden

$$U = \{(x,y,z) \mid x+2y+3z=0\} \subset \mathbb{R}^3$$

er et underrom. Vi bruker vår PROPOSISJON I:

ii) Hvis $\bar{u}, \bar{v} \in U$, så blir $\bar{u}+\bar{v} \in U$.

Skriv $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$ og $\bar{v} = (v_1, v_2, v_3)$.
Vår antagelse betyr at

$$u_1+2u_2+3u_3=0 \quad \text{og} \quad v_1+2v_2+3v_3=0.$$

Det gir

$$0 = (u_1+2u_2+3u_3)+(v_1+2v_2+3v_3)$$
$$= (u_1+v_1)+2(u_2+v_2)+3(u_3+v_3)$$

Siden $\bar{u}+\bar{v} = (u_1+v_1, u_2+v_2, u_3+v_3)$, viser dette at $\bar{u}+\bar{v} \in U$

i) $\bar{0} \in U$,
ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in U$
iii) $a \in F,\ \bar{u} \in U \Rightarrow a\bar{u} \in U$

EKSEMPEL

La oss bevise at delmengden

$$U = \{(x,y,z) \mid x + 2y + 3z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

er et underrom. Vi bruker vår PROPOSISJON I:

iii) Hvis $a \in F$ og $\bar{u} \in U$, så er $a\bar{u} \in U$.

La $\bar{u} = (u_1, u_2, u_3)$. Antagelsen $\bar{u} \in U$ betyr at

$$u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 0.$$

Dermed blir også

$$0 = a(u_1 + 2u_2 + 3u_3) = au_1 + 2au_2 + 3au_3,$$

som viser at $a\bar{u} = (au_1, au_2, au_3) \in U$.

$\square$

i) $\bar{0} \in U$,
ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} + \bar{v} \in U$
iii) $a \in F$, $\bar{u} \in U \Rightarrow a\bar{u} \in U$

EKSEMPEL

La oss bevise at delmengden

$$U = \{(x, y, z) \mid x \cdot y \cdot z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$$

ikke er et underrom:

Det holder å vise at i), ii) eller iii) fra vår PROPOSISJON I ikke er oppfylt. En av samarbeids-oppgavene avslører hvilket av disse tre kravene som ikke blir møtt. $\square$

EKSEMPEL

Delmengden

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

er et underrom

i) $\bar{0} = (0, 0, 0) \in U$ opplagt ✓

ii) $\bar{u}, \bar{v} \in U \Rightarrow \bar{u} = (x, y, 0)$, $\bar{v} = (z, t, 0)$

$\Rightarrow \bar{u} + \bar{v} = (x+z, y+t, 0) \in U$ ✓

iii) $a \in \mathbb{R}$, $\bar{u} \in U \Rightarrow \bar{u} = (x, y, 0)$

$\Rightarrow a\bar{u} = (ax, ay, 0) \in U$ ✓

$\square$

EKSEMPEL

Delmengden

$$U = \{(x, y, 1) \mid x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$$

er ikke et underrom

Både i), ii) og iii) feiler! $\square$

PROPOSISJON II

La U_1 og U_2 være underrom av et vektorrom V. Da er snittet $U_1 \cap U_2 \subset V$ også et underrom.

BEVIS

Vi bruker PROPOSISJON I. Anta at $U_1, U_2 \subset V$ er underrom.

i) $\bar{0} \in U_1 \cap U_2$.

Siden U_1 og U_2 er underrom har vi $\bar{0} \in U_1$ og $\bar{0} \in U_2$. Det betyr at

$$\bar{0} \in U_1 \cap U_2 .$$

PROPOSISJON II

La U_1 og U_2 være underrom av et vektorrom V.
Da er snittet $U_1 \cap U_2 \subset V$ også et underrom.

BEVIS

Vi bruker PROPOSISJON I. Anta at $U_1, U_2 \subset V$ er underrom.

ii) Hvis $\bar{u}, \bar{v} \in U_1 \cap U_2$, så er $\bar{u} + \bar{v} \in U_1 \cap U_2$.

$\bar{u} \in U_1 \cap U_2$ betyr at $\bar{u} \in U_1$ og $\bar{u} \in U_2$.
$\bar{v} \in U_1 \cap U_2$ betyr at $\bar{v} \in U_1$ og $\bar{v} \in U_2$.
Siden U_1 og U_2 er underrom får vi:
$\bar{u} + \bar{v} \in U_1$ og $\bar{u} + \bar{v} \in U_2$, hhv.
Altså har vi $\bar{u} + \bar{v} \in U_1 \cap U_2$

PROPOSISJON II

La U_1 og U_2 være underrom av et vektorrom V. Da er snittet $U_1 \cap U_2 \subset V$ også et underrom.

BEVIS

Vi bruker **PROPOSISJON I**. Anta at $U_1, U_2 \subset V$ er underrom.

iii) Hvis $a \in F$ og $\bar{u} \in U_1 \cap U_2$, så er $a\bar{u} \in U_1 \cap U_2$.

$\bar{u} \in U_1 \cap U_2$ betyr at $\bar{u} \in U_1$ og $\bar{u} \in U_2$.
Siden U_1 og U_2 er underrom får vi
$a\bar{u} \in U_1$ og $a\bar{u} \in U_2$, hhv.
Altså har vi $a\bar{u} \in U_1 \cap U_2$

$\square$

ADVARSEL

Unionen $U_1 \cup U_2 \subset V$ er typisk ikke et underrom!

Se for eksempel på

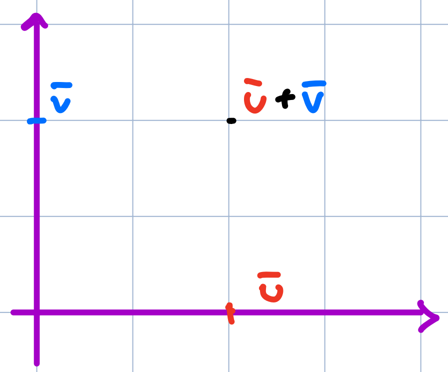
$$U_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{og}$$
$$U_2 = \{(0,y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Både U_1 og U_2 er underrom av $\mathbb{R}^2$ (SJEKK SELV), men unionen $U_1 \cup U_2$ er ikke et underrom av $\mathbb{R}^2$:

Vi har $\bar{u} = (1,0) \in U_1$, så $\bar{u} \in U_1 \cup U_2$

Vi har $\bar{v} = (0,1) \in U_2$, så $\bar{v} \in U_1 \cup U_2$.

Men $\bar{u} + \bar{v} = (1,1) \notin U_1 \cup U_2$.



Polynomer

F er en kropp
(tenk på $F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$)

DEFINISJON

Et polynom over F er et uttrykk på formen

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

med $a_i \in F$ $\forall i$.

Vi skriver $F[x]$ for mengden av alle polynomer over F.

$\mathbb{F}$ er en kropp
(tenk på $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{F} = \mathbb{C}$)

MERK

Mengden $\mathbb{F}[x]$ (altså mengden av alle polynomer over $\mathbb{F}$) har veldig naturlig/opplagt

- addisjon og
- skalarmultiplikasjon!

EKSEMPEL

Over $\mathbb{R}$ (altså i mengden $\mathbb{R}[x]$) har vi polynomene $f = x^2 + 3$ og $g = 2x^4 + x^2 + 1$.
Da er

$$f + g = 2x^4 + 2x^2 + 4 \quad \text{og} \quad 3 \cdot f = 3x^2 + 9. \qquad \square$$

F er en kropp
(tenk på $F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$)

FAKTUM

$F[x]$ er et vektorrom over F.

BEVIS

Sjekk selv at aksiomene er oppfylt. $\square$

DEFINISJON

Graden til et polynom $f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ er tallet

$$\deg(f) = \begin{cases} \max\{i \mid a_i \neq 0\} & \text{hvis } f \neq 0 \\ -\infty & \text{hvis } f = 0 \end{cases}$$

EKSEMPEL

Hvis vi lar $f = 1 + 12x^3 - x^7 \in \mathbb{C}[x]$, så blir

$$\deg(f) = 7.$$

$\square$

DEFINISJON

For hver $n \geq 0$ lar vi:

$$F[x]_{\leq n} = \{ f \in F[x] \mid \deg(f) \leq n \}$$

OBSERVASJON

Mengden $F[x]_{\leq n}$ blir et vektorrom over F for hver $n \geq 0$.

BEVIS

Det holder å vise at $F[x]_{\leq n} \subset F[x]$ er et underrom. Vi bruker PROPOSISJON I

i) Det er klart at $0 \in F[x]_{\leq n}$.

DEFINISJON

For hver $n \geq 0$ lar vi:

$$F[x]_{\leq n} = \{ f \in F[x] \mid \deg(f) \leq n \}$$

OBSERVASJON

Mengden $F[x]_{\leq n}$ blir et vektorrom over F.

BEVIS

Det holder å vise at $F[x]_{\leq n} \subset F[x]$ er et underrom. Vi bruker PROPOSISJON I

ii) For $f, g \in F[x]_{\leq n}$ blir

$$\deg(f+g) \leq \max\{\deg(f), \deg(g)\} \leq n.$$

Altså har vi $f+g \in F[x]_{\leq n}$.

DEFINISJON

For hver $n \geq 0$ lar vi:

$$F[x]_{\leq n} = \{ f \in F[x] \mid \deg(f) \leq n \}$$

OBSERVASJON

Mengden $F[x]_{\leq n}$ blir et vektorrom over F for hver $n \geq 0$.

BEVIS

Det holder å vise at $F[x]_{\leq n} \subset F[x]$ er et underrom. Vi bruker PROPOSISJON I

iii) For $f \in F[x]_{\leq n}$ og $a \in F$ blir

$$\deg(a \cdot f) = \begin{cases} \deg(f) & \text{hvis } a \neq 0 \\ -\infty & \text{hvis } a = 0 \end{cases}$$

Altså er $\deg(a \cdot f) \leq n$, i.e. $a \cdot f \in F[x]_{\leq n}$. $\square$