GENERELLE VEKTORROM

FORELESNING V1

MOTIVASJON

MA1201

$\bar{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

- Vektorer = ordna n-tupler av reelle (eller komplekse) tall.
  ↳ Vi studerte $\mathbb{R}^n$ (og $\mathbb{C}^n$).

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

- I $\mathbb{R}^n$ (og $\mathbb{C}^n$) kan vi ta
  - summen av to vektorer
  - skalarproduktet av en vektor med en skalar.

$5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 20 \\ 10 \end{pmatrix}$

- Sum og skalarprodukt og samspillet mellom disse følger visse regneregler.
  (E.g. $a \cdot (\bar{u} + \bar{v}) = a \cdot \bar{u} + a \cdot \bar{v}$)

MA1202

- $\mathbb{R}^n$ med sine regneregler er erkeeksempelet på et "vektorrom over $\mathbb{R}$".
  ↳ Aksiomer for generelle vektorrom!

- Vi prøver å forstå slike vektorrom (altså, å bevise teoremer som handler om dem).

- MEN FØRST: Vi trenger flere eksempler på vektorrom (utover $\mathbb{R}^n$ og $\mathbb{C}^n$)!
  ↳ Mange typer funksjoner kan oppfattes som vektorer i et vektorrom!

FUNKSJONER SOM VEKTORER ??

Se på mengdene

$S = \{$LILLA, ROSA, GRØNN$\}$ og $X = \{$Tuva, Solveig$\}$.

Hvis vi skal tenke på funksjoner fra S til X som "vektorer", så må vi kunne "legge sammen" to funksjoner f og g slik at

sommen "$f+g$" blir en ny funksjon fra S til X.

La $f, g : S \longrightarrow X$ være funksjonene gitt ved

$f($LILLA$) = $ Solveig; $f($ROSA$) = $ Solveig; $f($GRØNN$) = $ Tuva,

$g($LILLA$) = $ Solveig; $g($ROSA$) = $ Tuva; $g($GRØNN$) = $ Tuva.

Hva skal regelen for "$f+g$" være? For eksempel må jo

"$f+g$"(LILLA) = Tuva eller "$f+g$"(LILLA) = Solveig,

men det finnes ikke noe opplagt/naturlig valg!

KONGSTANKEN

Hva om vi har to funksjoner

$$f, g : \{\text{LILLA}, \text{ROSA}, \text{GRØNN}\} \longrightarrow \mathbb{R} \ ?$$

Mengden $\mathbb{R}$ har en addisjon ("vanlig" $+$)

Da kan vi la

$$\text{"}f+g\text{"}(\text{LILLA}) = \underbrace{f(\text{LILLA})}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g(\text{LILLA})}_{\in \mathbb{R}},$$

$$\text{"}f+g\text{"}(\text{ROSA}) = f(\text{ROSA}) + g(\text{ROSA}) \quad \text{og}$$

$$\text{"}f+g\text{"}(\text{GRØNN}) = f(\text{GRØNN}) + g(\text{GRØNN}).$$

Dette blir en ny funksjon

$$\text{"}f+g\text{"} : \{\text{LILLA}, \text{ROSA}, \text{GRØNN}\} \longrightarrow \mathbb{R} \ !$$

Hvis $f(\text{ROSA}) = 4$ og $g(\text{ROSA}) = 5$, så blir

$$\text{"}f+g\text{"}(\text{ROSA}) = f(\text{ROSA}) + g(\text{ROSA}) = 4 + 5 = 9.$$

DEFINISJON

La S være en mengde og la $f, g : S \to \mathbb{R}$ være to funksjoner.

Summen av f og g er funksjonen

$$f+g : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

Addisjon i $\mathbb{R}$!

$$(f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}} \quad \forall x \in S.$$

EKSEMPEL

La funksjonene $f, g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(n) = 4n + n^2 \quad \text{og} \quad g(n) = n^2 - \sin(n) \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Summen av f og g er en ny funksjon, nemlig

$$f+g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$$

med regelen $(f+g)(n) = f(n) + g(n) = 2n^2 + 4n - \sin(n)$. $\square$

DEFINISJON

La S være en mengde og la $f, g : S \to \mathbb{R}$ være to funksjoner.

Summen av f og g er funksjonen

$$f+g : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$(f+g)(x) = \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{g(x)}_{\in \mathbb{R}} \quad \forall\, x \in S.$$

Addisjon i $\mathbb{R}$!

KONSTRUKSJON

La S være en mengde. Da er

$\mathbb{R}^S$ = { funksjoner fra S til $\mathbb{R}$ }

$= \{ f : S \longrightarrow \mathbb{R} \mid f$ er en funksjon $\}$.

MERK

Vi har oppdaget at mengden $\mathbb{R}^S$ har en addisjon!

$(f, g \in \mathbb{R}^S \Rightarrow f+g \in \mathbb{R}^S .)$

$\square$

KONSTRUKSJON

La S være en mengde. Da er

$\mathbb{R}^S = \{\text{ funksjoner fra } S \text{ til } \mathbb{R}\}$

$= \{f : S \to \mathbb{R} \mid f \text{ er en funksjon}\}.$

DEFINISJON

Skalarmultiplikasjonen av $a \in \mathbb{R}$ med $f \in \mathbb{R}^S$ er funksjonen

$$af : S \longrightarrow \mathbb{R}$$

Multiplikasjon i $\mathbb{R}$!

gitt ved $(af)(x) = \underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{f(x)}_{\in \mathbb{R}} \quad \forall \; x \in S.$

POENGET

Mengden $\mathbb{R}^S$ (med sin sum og skalarmultiplikasjon)

oppfører seg som

mengden $\mathbb{R}^n$ (med sin sum og skalarmultiplikasjon)!

(SPOILER: DE ER BEGGE "VEKTORROM OVER $\mathbb{R}$"!)

$\mathbb{R}^S = \{\text{funksjoner fra } S \text{ til } \mathbb{R}\}$

EKSEMPEL

La $S = \{\text{LILLA}, \text{ROSA}, \text{GRØNN}\}$. Hver funksjon $f \in \mathbb{R}^S$ er bestemt av tre reelle tall, nemlig

$f(\text{LILLA})$, $f(\text{ROSA})$ og $f(\text{GRØNN})$.

For eksempel har vi funksjonene $g, h \in \mathbb{R}^S$ definert ved

$g(\text{LILLA}) = 5$, $g(\text{ROSA}) = \pi$ og $g(\text{GRØNN}) = -1$ og

$h(\text{LILLA}) = 0$, $h(\text{ROSA}) = -2$ og $h(\text{GRØNN}) = 8$.

Summen av g og h er funksjonen $g+h \in \mathbb{R}^S$ gitt ved

$$(g+h)(\text{LILLA}) = g(\text{LILLA}) + h(\text{LILLA}) = 5 + 0 = 5,$$
$$(g+h)(\text{ROSA}) = g(\text{ROSA}) + h(\text{ROSA}) = \pi - 2 \quad \text{og}$$
$$(g+h)(\text{GRØNN}) = g(\text{GRØNN}) + h(\text{GRØNN}) = -1 + 8 = 7.$$

$\mathbb{R}^S = \{$ funksjoner fra S til $\mathbb{R}\}$

EKSEMPEL

La $S = \{$ LILLA , ROSA , GRØNN $\}$. Hver funksjon $f \in \mathbb{R}^S$ er bestemt av tre reelle tall, nemlig

$f($LILLA$)$, $f($ROSA$)$ og $f($GRØNN$)$.

For eksempel har vi funksjonene $g, h \in \mathbb{R}^S$ definert ved

$g($LILLA$) = 5$, $g($ROSA$) = \pi$ og $g($GRØNN$) = -1$ og

$h($LILLA$) = 0$, $h($ROSA$) = -2$ og $h($GRØNN$) = 8$.

Skalarmultiplikasjonen av tallet $10 \in \mathbb{R}$ med $h \in \mathbb{R}^S$ blir funksjonen $10 h \in \mathbb{R}^S$ gitt ved

$(10 h)($LILLA$) = 10 \cdot h($LILLA$) = 0$

$(10 h)($ROSA$) = 10 \cdot h($ROSA$) = -20$

$(10 h)($GRØNN$) = 10 \cdot h($GRØNN$) = 80$

$\square$

$\mathbb{R}^S = \{\text{funksjoner fra } S \text{ til } \mathbb{R}\}$

EKSEMPEL

La $S = [0,1]$. Da er

$$\mathbb{R}^S = \{\text{funksjoner } f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\}$$

For eksempel har vi funksjonene $g, h \in \mathbb{R}^S$ definert ved

$$g(x) = x^2 + x \quad \text{og} \quad h(x) = 5 \qquad \forall\ x \in [0,1]$$

Summen av g og h er funksjonen $g+h \in \mathbb{R}^S$ gitt ved

$$(g+h)(x) = g(x) + h(x) = x^2 + x + 5 \quad \forall\, x \in [0,1]$$

Skalarmultiplikasjonen av tallet $2 \in \mathbb{R}$ med $g \in \mathbb{R}^S$ blir funksjonen $2g \in \mathbb{R}^S$ gitt ved

$$(2g)(x) = 2 \cdot g(x) = 2(x^2 + x) \qquad \forall\ x \in [0,1] \qquad \square$$

Vektorrom

DEFINISJON

Et vektorrom over $\mathbb{R}$ er en mengde V med en addisjon og en skalarmultiplikasjon slik at:

I $\quad \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

II $\quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

III $\quad$ Det finnes en nullvektor $\bar{0} \in V$ slik at

$$\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$$

IV $\quad$ For hver $\bar{v} \in V$ finnes en $-\bar{v} \in V$ slik at

$$\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$$

V $\quad a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

VI $\quad 1\bar{v} = \bar{v}$

VII $\quad (a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$

VIII $\quad a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$

MÅ HOLDE FOR HVER $a, b \in \mathbb{R}$ OG HVER $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$!

DEFINISJON

Et **vektorrom** over $\mathbb{C}$ er en mengde V med en addisjon og en skalarmultiplikasjon slik at:

I $\quad \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

II $\quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

III $\quad$ Det finnes en **nullvektor** $\bar{0} \in V$ slik at

$$\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$$

IV $\quad$ For hver $\bar{v} \in V$ finnes en $-\bar{v} \in V$ slik at

$$\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$$

V $\quad a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

VI $\quad 1\bar{v} = \bar{v}$

VII $\quad (a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$

VIII $\quad a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$

MÅ HOLDE FOR HVER $a, b \in \mathbb{C}$ OG HVER $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$!

DEFINISJON La F være en kropp (Tenk $F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$.)

Et **vektorrom** over F er en mengde V med en addisjon og en skalarmultiplikasjon slik at:

I $\quad \bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$

II $\quad \bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$

III $\quad$ Det finnes en **nullvektor** $\bar{0} \in V$ slik at

$$\bar{v} + \bar{0} = \bar{v}$$

IV $\quad$ For hver $\bar{v} \in V$ finnes en $-\bar{v} \in V$ slik at

$$\bar{v} + (-\bar{v}) = \bar{0}$$

V $\quad a(b\bar{v}) = (ab)\bar{v}$

VI $\quad 1\bar{v} = \bar{v}$

VII $\quad (a+b)\bar{v} = a\bar{v} + b\bar{v}$

VIII $\quad a(\bar{v} + \bar{w}) = a\bar{v} + a\bar{w}$

MÅ HOLDE FOR HVER $a, b \in F$ OG HVER $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$!

MERK

- Vi kan bevise at vektorene $\bar{o}$ i III og $-\bar{v}$ i IV er entydige.
- Vi skriver $\bar{v} + (-\bar{w}) = \bar{v} - \bar{w}$.

EKSEMPEL

Mengden $\mathbb{R}^3$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$. Her er

- $\bar{0} = (0, 0, 0)$ og
- for $\bar{v} = (4, 2, -1)$ er $-\bar{v} = (-4, -2, 1)$. $\square$

EKSEMPEL

Mengden $\mathbb{R}^n$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$. Her er

Nullvektor

Tallet null

- $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ og
- for $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ er $-\bar{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$.

Reelle tall

$\square$

EKSEMPEL

Mengden $\mathbb{C}^n$ er et vektorrom over $\mathbb{C}$. Her er

Nullvektor — Tallet null

- $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ og
- for $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ er $-\bar{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_n)$.

Komplekse tall

$\square$

EKSEMPEL

Mengden $\mathbb{C}^n$ er et vektorrom over $\mathbb{R}$. Her er

Nullvektor — Tallet null

- $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ og
- for $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ er $-\bar{v} = (-v_1, -v_2, \ldots, -v_3)$.

Komplekse tall

$\square$

$\mathbb{R}^S = \{ \text{funksjoner fra } S \text{ til } \mathbb{R} \}$

EKSEMPEL

La $S = [0,1]$. Da har vi $\mathbb{R}$-vektorrommet

$$\mathbb{R}^S = \{ \text{funksjoner } f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^{[0,1]}$$

- nullvektoren i $\mathbb{R}^{[0,1]}$ er (den entydige) funksjonen $\bar{o} : [0,1] \to \mathbb{R}$ som er gitt ved regelen

$$\bar{o}(x) = 0 \qquad \forall\ x \in [0,1]$$

Da blir jo $\bar{o} + f = f$ for hver $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$, siden

$$(\bar{o} + f)(x) = \underbrace{\bar{o}(x)}_{=0} + f(x) = f(x) \qquad \forall\ x \in [0,1]$$

$\mathbb{R}^S = \{$ funksjoner fra S til $\mathbb{R}\}$

EKSEMPEL

La $S = [0,1]$. Da har vi $\mathbb{R}$-vektorrommet

$$\mathbb{R}^S = \{\text{funksjoner } f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^{[0,1]}.$$

- Hvis $f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ er funksjonen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ gitt ved
  $$f(x) = \sin(x) + x^2 - 5 \quad \forall\ x \in [0,1],$$
  så er $-f \in \mathbb{R}^{[0,1]}$ den funksjonen $-f : [0,1] \to \mathbb{R}$ som er gitt ved regelen
  $$-f(x) = -\sin(x) - x^2 + 5 \quad \forall\ x \in [0,1].$$

Da blir jo $f + (-f) = \bar{0}$ siden

$$\begin{aligned}(f+(-f))(x) &= f(x) + (-f)(x)\\ &= \sin(x) + x^2 - 5 + (-\sin(x) - x^2 + 5)\\ &= 0 = \bar{0}(x)\end{aligned} \quad \forall\ x \in [0,1] \quad \square$$

$\mathbb{R}^S = \{$ funksjoner fra S til $\mathbb{R}\}$

EKSEMPEL

La $S = \{$LILLA, ROSA, GRØNN$\}$. Da er $\mathbb{R}^S$ et vektorrom over $\mathbb{R}$. Her er

- nullvektor = den funksjonen $\bar{0} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ som er gitt ved

$\bar{0}$(LILLA) = 0

$\bar{0}$(ROSA) = 0

$\bar{0}$(GRØNN) = 0

Tallet null

- Hvis $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ er gitt ved

f(LILLA) = 4, f(ROSA) = 2 og f(GRØNN) = −1,

så er $-f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ funksjonen gitt ved

$-f$(LILLA) = −4, $-f$(ROSA) = −2 og $-f$(GRØNN) = 1. $\square$

$\mathbb{R}^S = \{$ funksjoner fra S til $\mathbb{R}\}$

EKSEMPEL

La S være en hvilkensomhelst mengde.
Da er $\mathbb{R}^S$ et vektorrom over $\mathbb{R}$. Her er

- nullvektor = den funksjonen $\bar{0} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ som er gitt ved

"Nullfunksjonen"

$$\bar{0}(s) = 0 \quad \forall \; s \in S$$

Tallet null

- For hver funksjon $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ er $\underbrace{-f}_{\text{Funksjonen "minus f"}} : S \longrightarrow \mathbb{R}$ den funksjonen som er gitt ved

$$(-f)(s) = \underbrace{-f(s)}_{\text{Et reelt tall!}} \quad \forall \; s \in S$$

$\square$