FUNKSJONER

FORELESNING V06

DEFINISJON

En funksjon fra en mengde A til en mengde B er en regel som assosierer/"sender" hvert element i A til et (bare ett!) element i B.

Mengden A kalles definisjonsmengden (domenet) ; mengden B kalles verdiområdet (kodomenet) til funksjonen.

Input

Potensiell output

NOTASJON

Hvis f er en funksjon fra mengden A til mengden B, skriver vi $f : A \longrightarrow B$.

For hvert element $a \in A$ skriver vi $f(a)$ for det assosierte elementet i B. Altså, regelen som beskriver f er å sende $a \in A$ til $f(a) \in B$.

MERK

To funksjoner $f : A \longrightarrow B$ og $g : X \longrightarrow Y$ er like hvis (og bare hvis)

- $A = X$,
- $B = Y$ og
- $f(a) = g(a) \quad \forall \; a \in A \; (= X)$.

EKSEMPEL

Funksjonen $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ gitt ved $f(n) = n + 1 \;\; \forall \; n \in \mathbb{Z}$ er ikke lik funksjonen $g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ gitt ved $g(n) = n + 1 \;\; \forall \; n \in \mathbb{Z}$.

$\square$

EKSEMPEL

Se på mengdene $A = \{Tuva, Solveig\}$ og $B = \{1, 5, 9\}$.

Vi har en funksjon $f: A \to B$ bestemt av $f(Tuva) = 5$ og $f(Solveig) = 1$.

Vi har også funksjonen $g: A \to B$ med regel $g(Tuva) = 9$ og $g(Solveig) = 9$.

Vi har også en funksjon $h: B \to A$ gitt ved $h(1) = Solveig$, $h(5) = Solveig$ og $h(9) = Tuva$. $\square$

EKSEMPEL

Vi har en funksjon $q : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ bestemt av formelen

$q(n) = n^2 \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}$.

HER KLARER VI **IKKE**
Å SKRIVE NED NOEN
LISTE MED HVER INPUT
OG TILHØRENDE OUTPUT

$\square$

EKSEMPEL

Vi har funksjonen $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$p(x) = x^2 \quad \forall \quad x \in \mathbb{R}$

NB!
$p \neq q$

Vi har funksjonen $s : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$s(n) = n^2 \quad \forall \quad n \in \mathbb{Z}$.

NB!
$p \neq s \neq q$

$\square$

EKSEMPEL

Vi har en funksjon $q : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ bestemt av formelen
$q(n) = n^2 \quad \forall \ n \in \mathbb{Z}$.

HER KLARER VI **IKKE** Å SKRIVE NED NOEN **LISTE** MED HVER INPUT OG TILHØRENDE OUTPUT

$\square$

EKSEMPEL

La $A = \{1, 2, 3\}$. Vi har en funksjon $t : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ gitt ved
$t(n) = n^2 \quad \forall \ n \in A$.

Ekvivalent: Funksjonen $t : A \longrightarrow \mathbb{Z}$ er bestemt av lista
$t(1) = 1$, $t(2) = 4$ og $t(3) = 9$.

$\square$

EKSEMPEL

Vi har en funksjon $p: \{1, 2, 3, 4, \dots\} \longrightarrow \{YES, NO\}$ bestemt av regelen

$$p(n) = \begin{cases} YES & \text{hvis } n \text{ er et primtall} \\ NO & \text{hvis } n \text{ ikke er et primtall.} \end{cases}$$

For eksempel er $p(5) = YES$, $p(10) = NO$ og $p(1) = NO$. $\square$

MERK

I skrivende stund (okt. 2023) vet ikke menneskeheten om

$$p(2^{13380298} - 27) = YES \quad \text{eller} \quad p(2^{13380298} - 27) = NO.$$

Men p er likevel en funksjon!

ALTERNATIV NOTASJON

La $f : A \longrightarrow B$ være en funksjon. Hvis $a \in A$ og $f(a) = b \in B$, så skriver vi gjerne $a \overset{f}{\longmapsto} b$ (eller bare $a \longmapsto b$ hvis det er klart at vi snakker om f).

EKSEMPEL

Se på mengdene $A = \{\text{Tuva}, \text{Solveig}\}$ og $B = \{1, 5, 9\}$.

Vi har en funksjon $f : A \longrightarrow B$ gitt ved

$f(\text{Tuva}) = 5$ og $f(\text{Solveig}) = 1$.

Altså, vi har

$\text{Tuva} \overset{f}{\longmapsto} 5$ og $\text{Solveig} \overset{f}{\longmapsto} 1$. $\square$

ALTERNATIV NOTASJON

La $f: A \longrightarrow B$ være en funksjon. Hvis $a \in A$ og $f(a) = b \in B$, så skriver vi gjerne $a \xmapsto{f} b$ (eller bare $a \longmapsto b$ hvis det er klart at vi snakker om f).

EKSEMPEL

Funksjonen $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $f(x) = x^2 + 1 \ \forall \ x \in \mathbb{Q}$ kan også beskrives slik:

$$\begin{cases} f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad x \longmapsto x^2 + 1 \end{cases}$$

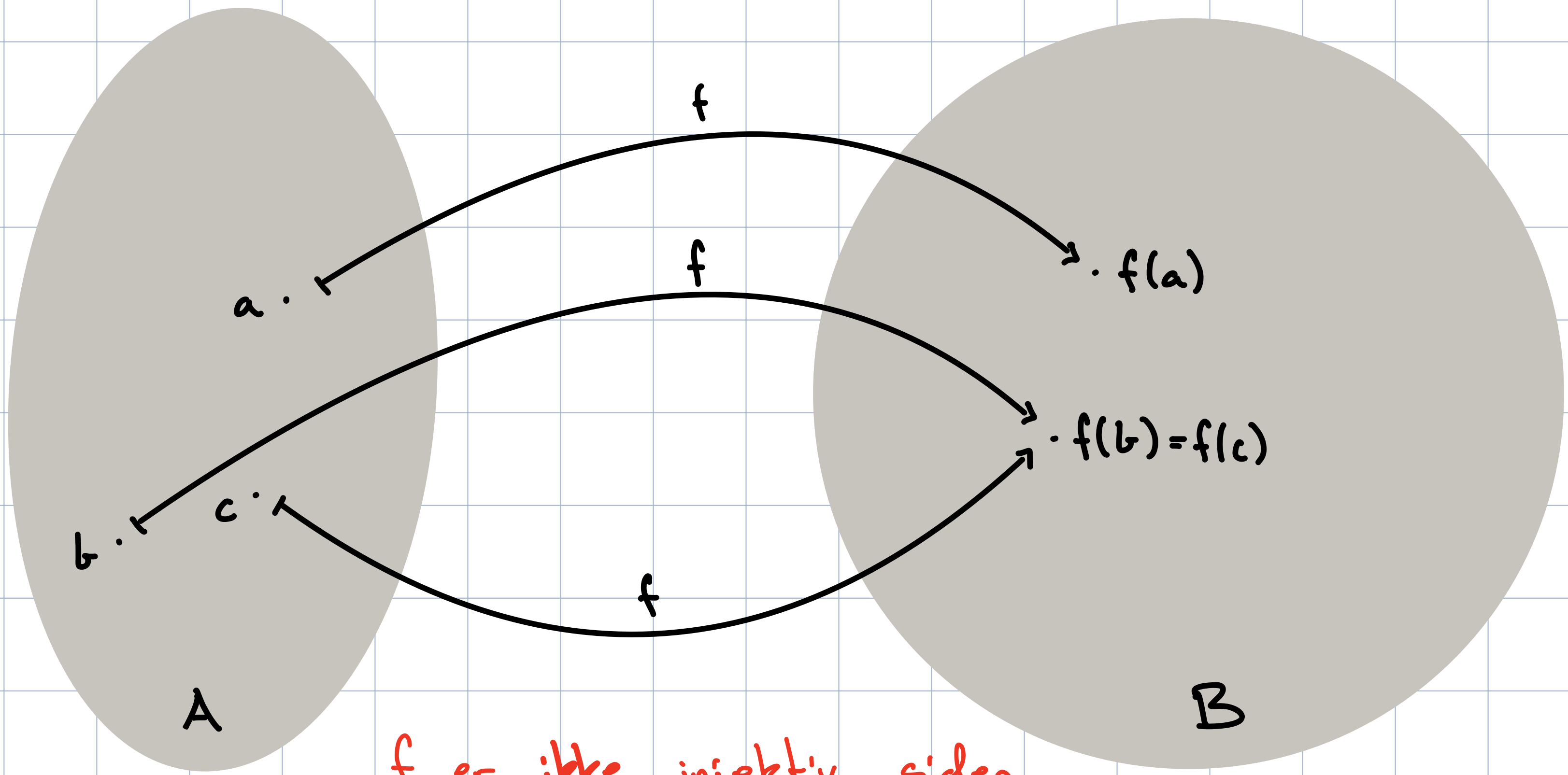
$\square$

EGENSKAPER SOM FUNKSJONER KAN HA

DEFINISJON

En funksjon $f : A \longrightarrow B$ kalles

- injektiv (eller 1 – 1) hvis $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
  (ulik input gir ulik output);



f er ikke injektiv, siden
$b \neq c$, men $f(b) = f(c)$.

DEFINISJON

En funksjon $f: A \longrightarrow B$ kalles

- injektiv (eller 1–1) hvis $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
  (ulik input gir ulik output);

EKSEMPEL

La $A = \{\text{Tuva}, \text{Solveig}\}$ og $B = \{1, 5, 9\}$.

La $f: A \longrightarrow B$ være gitt ved $f(\text{Tuva}) = 5$ og $f(\text{Solveig}) = 1$

Er f injektiv? JA!

La $h: B \longrightarrow A$ være funksjonen med regelen

$h(1) = \text{Solveig}$, $h(5) = \text{Solveig}$ og $h(9) = \text{Tuva}$.

Er h injektiv? NEI! ($1 \neq 5 \in B$, men $h(1) = h(5) \in A$.) $\square$

DEFINISJON

En funksjon $f: A \longrightarrow B$ kalles

- injektiv (eller 1-1) hvis $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(b)$ (ulik input gir ulik output);

EKSEMPEL

La $f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = x^2 + 1$ for hver $x \in \mathbb{Q}$.
Er f injektiv?
NEI! (For eksempel er $2 \neq -2$ i $\mathbb{Q}$, men $f(2) = f(-2)$ $(=4)$.)

La $g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ være gitt ved $g(n) = n+1$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.
Er g injektiv?
JA! (Hvis $n \neq m$ i $\mathbb{Z}$, så blir $\underbrace{g(n)}_{=n+1} \neq \underbrace{g(m)}_{=m+1}$.)

$\square$

DEFINISJON

En funksjon $f: A \longrightarrow B$ kalles

· surjektiv (eller på) hvis det for hvert element $b \in B$ finnes (minst) en $a \in A$ slik at $b = f(a)$
(hele B blir "truffet");

EKSEMPEL

La $A = \{\text{Tuva}, \text{Solveig}\}$ og $B = \{1, 5, 9\}$.

La $f: A \longrightarrow B$ være gitt ved $f(\text{Tuva}) = 5$ og $f(\text{Solveig}) = 1$
Er f surjektiv? NEI! (Elementet $9 \in B$ blir ikke "truffet".)

La $h: B \longrightarrow A$ være funksjonen med regelen
$h(1) = \text{Solveig}$, $h(5) = \text{Solveig}$ og $h(9) = \text{Tuva}$.
Er h surjektiv? JA! (Hvert element i A blir truffet.) $\square$

DEFINISJON

En funksjon $f: A \longrightarrow B$ kalles

· **surjektiv** (eller **på**) hvis det for hvert element $b \in B$ finnes (minst) en $a \in A$ slik at $b = f(a)$

(hele B blir "truffet");

EKSEMPEL

La $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = x^2 + 1$ for hver $x \in \mathbb{R}$.

Er f surjektiv?

NEI! ($f(x) \geq 1 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$, så for eksempel blir $0 \in \mathbb{R}$ ikke truffet.)

La $g: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ være gitt ved $g(n) = n + 1 \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$.

Er g surjektiv?

JA! (For hver $n \in \mathbb{Z}$ er $n - 1 \in \mathbb{Z}$ og $g(n-1) = n$.)

DEFINISJON

En funksjon $f: A \longrightarrow B$ kalles
· surjektiv (eller på) hvis det for hvert element $b \in B$ finnes (minst) en $a \in A$ slik at $b = f(a)$
(hele B blir "truffet");

DEFINISJON

La $f: A \to B$ være en funksjon og la $D \subset A$ være en delmengde. Bildet av D under f er delmengden

$$f(D) = \{ f(d) \mid d \in D \} \subset B.$$

Mengden $f(A)$ kalles også verdimengden til f.

MERK

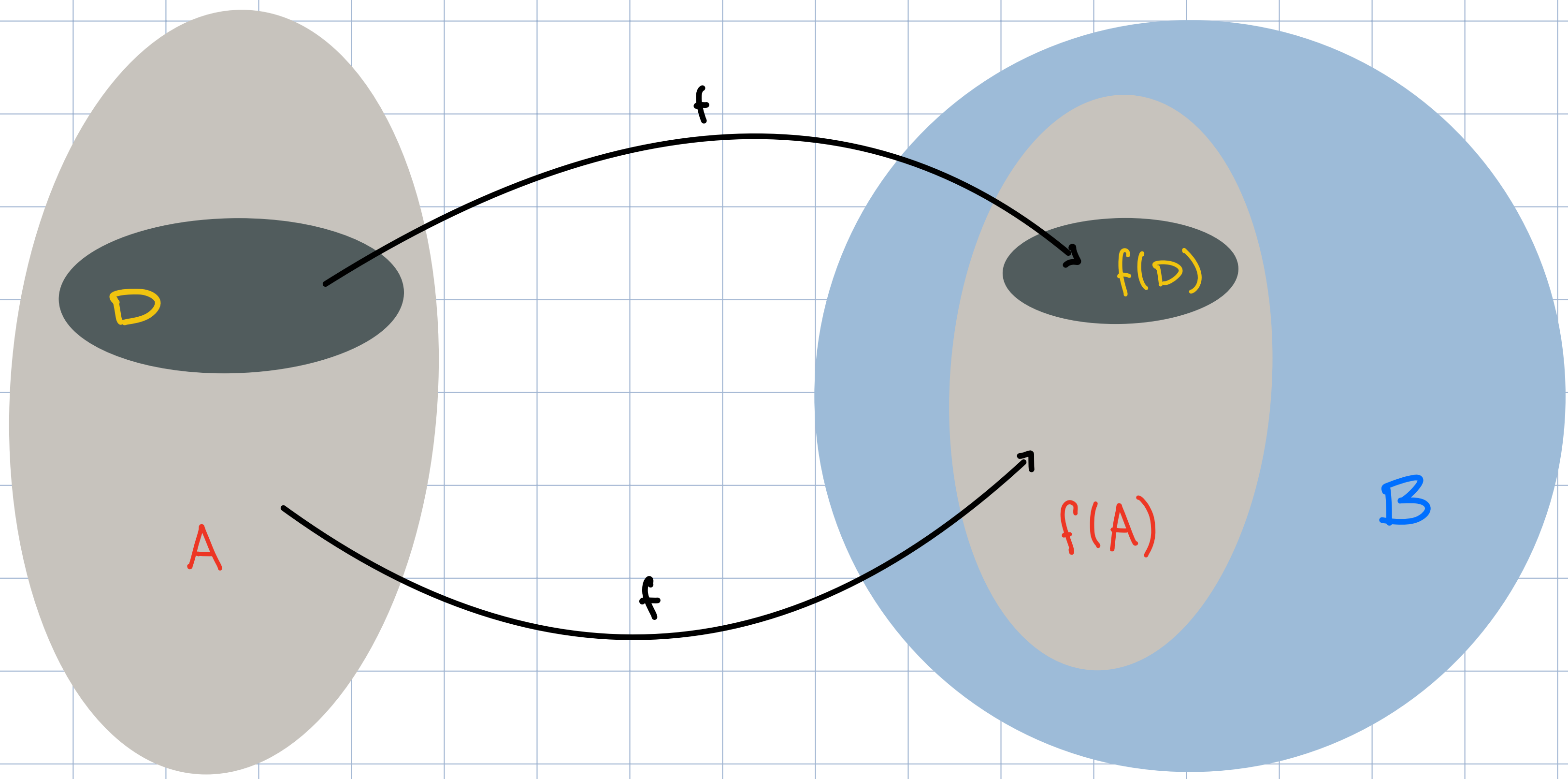
$f: A \longrightarrow B$ er surjektiv $\iff$ $f(A) = B$ $\square$

DEFINISJON

La $f : A \to B$ være en funksjon og la $D \subset A$ være en delmengde. Bildet av D under f er delmengden

$$f(D) = \{ f(d) \mid d \in D \} \subset B.$$

Mengden $f(A)$ kalles også verdimengden til f.



DEFINISJON

La $f: A \to B$ være en funksjon og la $D \subset A$ være en delmengde. Bildet av D under f er delmengden

$$f(D) = \{ f(d) \mid d \in D \} \subset B.$$

Mengden $f(A)$ kalles også verdimengden til f.

EKSEMPEL

La $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(n) = 2n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

- Domenet (a.k.a. definisjonsmengden) til f er $\mathbb{Z}$.
- Kodomenet (a.k.a. verdiområdet) til f er $\mathbb{R}$.
- Verdimengden til f (a.k.a. bildet av $\mathbb{Z}$ under f) er
$$f(\mathbb{Z}) = \{ f(n) \mid n \in \mathbb{Z} \} = \{ 2n \mid n \in \mathbb{Z} \} = \{\text{partall}\} \subset \mathbb{R}.$$
- La $D = \{0, 1, 5\} \subset \mathbb{Z}$. Bildet av D under f er
$$f(D) = \{ f(n) \mid n \in D \} = \{ 2n \mid n = 0, 1, 5 \} = \{0, 2, 10\} \subset \mathbb{R}. \quad \square$$

DEFINISJON

En funksjon $f: A \longrightarrow B$ kalles

- injektiv (eller 1 – 1) hvis $a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(b)$
  (ulik input gir ulik output);

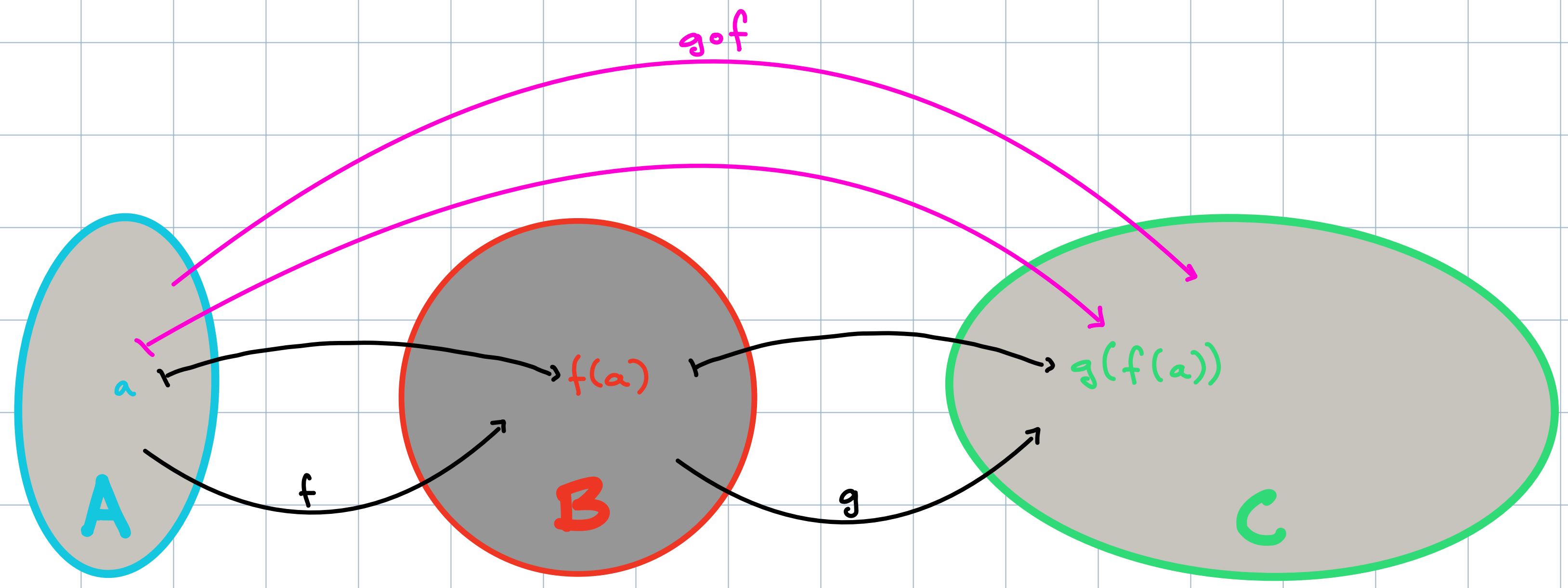
- surjektiv (eller på) hvis det for hvert element $b \in B$ finnes (minst) en $a \in A$ slik at $b = f(a)$
  (hele B blir "truffet");

- bijektiv (eller en 1-1-korrespondanse) hvis den er både injektiv og surjektiv.

SAMMENSETTING AV FUNKSJONER

DEFINISJON

La $f : A \longrightarrow B$ og $g : B \longrightarrow C$ være funksjoner.



DEFINISJON

La $f: A \longrightarrow B$ og $g: B \longrightarrow C$ være funksjoner.
Den sammensatte funksjonen (eller komposisjonen) av f og g er funksjonen

$$g \circ f : A \longrightarrow C \quad \text{gitt ved} \quad (g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad \forall a \in A.$$

Altså, funksjonen $g \circ f$ går fra A til C "via B":

$$g \circ f \begin{cases} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ a \longmapsto f(a) \longmapsto g(f(a)) \end{cases}$$

Regelen for $g \circ f$ er "for hver $a \in A$ bruk først regelen for f på a, og bruk deretter regelen for g på $f(a)$"

$$g \circ f \begin{cases} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ a \longmapsto f(a) \longmapsto g(f(a)) \end{cases}$$

EKSEMPEL

La $A = \{\text{Tura}, \text{Solveig}\}$. Se på funksjonene

$$\begin{cases} f : A \longrightarrow \mathbb{Z} \\ \quad \text{Tura} \longmapsto 4 \\ \quad \text{Solveig} \longmapsto -3 \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad n \longmapsto n^2. \end{cases}$$

Komposisjonen av f og g er funksjonen $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$(g \circ f)(\text{Tura}) = 16 \quad \text{og} \quad (g \circ f)(\text{Solveig}) = 9$$

$$\begin{bmatrix} A \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ \text{Tura} \longmapsto 4 \longmapsto 16 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} A \xrightarrow{f} \mathbb{Z} \xrightarrow{g} \mathbb{R} \\ \text{Solveig} \longmapsto -3 \longmapsto 9 \end{bmatrix}$$

$$g\circ f \begin{cases} A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ a \longmapsto f(a) \longmapsto g(f(a)) \end{cases}$$

EKSEMPEL

Se på funksjonene

$f: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ gitt ved $f(n) = n^2 + n \quad \forall \; n \in \mathbb{Z}$

og

$g: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved $g(x) = \sin(x) - x^2 \quad \forall \; x \in \mathbb{Q}$.

Komposisjonen av f og g er funksjonen

$(g\circ f): \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$(g\circ f)(n) = \sin(n^2+n) - n^4 - 2n^3 - n^2 \quad \forall \; n \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \xmapsto{f} & n^2+n & \xmapsto{g} & \sin(n^2+n) - (n^2+n)^2 = \sin(n^2+n) - n^4 - 2n^3 - n^2 \end{array}\right] \quad \square$$