MENGDER

FORELESNING V0a

APPELL

Definisjoner er viktige.

1) LÆR DEM!

2) BRUK DEM!

"DEFINISJON"

En mengde er en "samling" av elementer.

MERK

Elementene kan være hva som helst (tall, vektorer, bokstaver, navn, ...)!

KONVENSJON

Vi bestemmer (og noterer) en mengde A ved å beskrive elementene som utgjør A (mellom et sett klammeparenteser).

EKSEMPEL

Mengden som består av elementene 1, 5 og 9 skrives

$$\{1, 5, 9\}.$$

Mengden som består av elementene Tuva og Solveig skrives

$$\{\text{Tuva}, \text{Solveig}\}.$$

Mengden som består av alle heltall skrives

$$\{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \; (= \mathbb{Z}).$$

$\square$

NOTASJON

Vi kan beskrive en mengde ved å oppgi en betingelse $P(x)$ som definerer elementene x:

$A = \{ x \mid P(x) \}$ leses "A er mengden av alle elementer x som oppfyller $P(x)$".

EKSEMPEL

$A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \}$ er mengden av alle reelle tall som er større enn null.

$B = \{ x \in \mathbb{Q} \mid |x| = 1 \}$ er mengden av alle rasjonale tall som har absoluttverdi lik 1. $\square$

FUNDAMENTALT

- Hver mengde er veldefinert!
  ↳ Hvis A er en mengde og a er et eller annet objekt, så er definitivt $a \in A$ eller $a \notin A$.

  IKKE-EKSEMPEL: Vi vil aldri finne på å si $\{ n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ er ganske stort} \}$.

- Hver mengde er entydig bestemt av sine elementer.
  ⇒ To mengder er like hvis (og bare hvis) de inneholder nøyaktig de samme elementene!

  ↳ Det finnes nøyaktig én mengde som ikke inneholder noen elementer. Dette er den tomme mengden $\emptyset$.

DEFINISJON

En mengde A er en **delmengde** av en mengde B dersom hvert element i A også ligger i B.

(Altså, hvis $a \in A \Rightarrow a \in B$.)

STANDARDSTRATEGI

For å vise at to mengder A og B er **like**:

Vis at $A \subset B$ og at $B \subset A$!

(Altså at $a \in A \Rightarrow a \in B$
og at $b \in B \Rightarrow b \in A$)

EKSEMPEL

Se på mengdene

$A = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n$ er et partall$\}$ og

$B = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n^2$ er et partall$\}$.

Det er klart at $A \subset B$, altså at $n \in A \Rightarrow n \in B$.

$n \in A \Rightarrow$ det finnes et heltall k slik at $n = 2k$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2$, så n^2 er et partall, altså $n \in B$.

Ekvivalent: $n \notin A \Rightarrow n \notin B$

Det er også sant at $B \subset A$, altså at $n \in B \Rightarrow n \in A$.

$n \notin A \Rightarrow$ det finnes et heltall m slik at $n = 2m+1$

$\Rightarrow n^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 4m(m+1) + 1$,

så n^2 er et oddetall, altså $n \notin B$.

Altså er $A = B$! (Vi har vist at $A \subset B$ og at $B \subset A$)

EKSEMPEL

Se på mengdene

$$A = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ er et partall} \},$$
$$\overset{\shortparallel}{B} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid n^2 \text{ er et partall} \} \text{ og}$$
$$C = \{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 \text{ er et partall} \}.$$

Det er opplagt sant at $B \subset C$.

Men for eksempel har vi: $\sqrt{2} \in C$ og $\sqrt{2} \notin B$, altså $C \not\subset B$. Så $B \neq C$ $(\neq A)$. $\square$