SAMARBEIDSOPPGAVER S24
MA1202/6202

FØRSTE TIME

Oppgave 1. La
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1-i \\ 1+i & 5 \end{pmatrix}.$$
Finn ei unitær matrise U som er slik at $U^{-1}AU$ er diagonal.

Oppgave 2. La
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
Finn ei ortogonal matrise Q som er slik at $Q^{-1}BQ$ er diagonal.

Oppgave 3. La
$$C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & 0 \end{pmatrix}.$$
Finn ei unitær matrise U som er slik at $U^{-1}CU$ er diagonal.

Oppgave 4. Vi ser på den lineære operatoren $f\colon F^2 \longrightarrow F^2$ gitt ved
$$f(x, y) = (2x - 3y, 3x + 2y).$$

(a) La $F = \mathbb{R}$. Finnes det en ortonormal basis β for $\mathbb{R}^2$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal? Finn i så fall en slik β.

(b) La $F = \mathbb{C}$. Finnes det en ortonormal basis γ for $\mathbb{C}^2$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at $[f]_\gamma$ er diagonal? Finn i så fall en slik γ.

Andre time

Oppgave 5. La f være en lineær operator på $\mathbb{R}^3$ slik at matrisa $[f]_\beta$ er øvre triangulær, hvor

$$\beta = \{(1,\, 0,\, 0),\ (1,\, 1,\, 1),\ (1,\, 1,\, 2)\}.$$

Finn en ortonormal basis β' for $\mathbb{R}^3$ (med det euklidske indreproduktet) som er slik at matrisa $[f]_{\beta'}$ er øvre triangulær.

Oppgave 6. La f være en normal lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$. Vis at

$$f \text{ er selvadjungert} \iff f \text{ har kun reelle egenverdier.}$$

Oppgave 7. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{C}$.

Vis at enhver normal operator på V har ei kvadratrot.
(En operator r på V kalles ei *kvadratrot* av en operator f på V hvis $r^2 = f$.)

Oppgave 8. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{R}$ med en selvadjungert lineær operator f, la $\lambda \in \mathbb{R}$ og la $\varepsilon > 0$.

Vis at hvis det finnes en vektor $\bar{v} \in V$ slik at

$$||\bar{v}|| = 1 \quad \text{og} \quad ||f(\bar{v}) - \lambda\bar{v}|| < \varepsilon,$$

så har f en egenverdi λ' som er slik at $|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

Mer, mer, mer!

Oppgave 9. La V være et komplekst indreproduktrom med en lineær operator

$$s\colon V \longrightarrow V.$$

Vis at de følgende utsagnene er ekvivalente:

(i) s er en isometri; og

(ii) det finnes en ortonormal basis for V som består av egenvektorer for s slik at de tilhørende egenverdiene alle har absoluttverdi lik 1.

Oppgave 10. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom over $\mathbb{R}$ med en lineær operator f.

Vis at V har en basis av egenvektorer for f hvis og bare hvis det finnes et indreprodukt på V som gjør f til en selvadjungert operator.

Oppgave 11. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom (over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Er det sant at enhver selvadjungert operator på V har ei tredjerot?
(En operator r på V kalles ei *tredjerot* av en operator f på V hvis $r^3 = f$.)

Enda mer, mer, mer!

Oppgave 12. I denne oppgaven skal vi etablere det reelle spektralteoremet. Vi deler beviset opp i en rekke hjelperesultater.

Stående antagelse: I Oppgave 12.1–12.3 er

- V et endeligdimensjonalt indreproduktrom over $\mathbb{R}$ og
- f en selvadjungert lineær operator på V.

Oppgave 12.1 (Inverterbare kvadratiske uttrykk)**.** La $b, c \in \mathbb{R}$ være slik at $b^2 < 4c$. Vis at operatoren

$$f^2 + bf + c \cdot \mathsf{id}_V$$

er inverterbar.

Oppgave 12.2 (Selvadjungerte operatorer har egenverdier)**.** Vis at hvis $V \neq \{\bar{0}\}$ så har f en egenverdi.

Oppgave 12.3 (Selvadjungerte operatorer og invariante underrom)**.** La $U \subset V$ være et underrom som er invariant under f. Vis at

(1) underrommet $U^\perp$ er invariant under f,

(2) operatoren $f|_U$ på U er selvadjungert og

(3) operatoren $f|_{U^\perp}$ på $U^\perp$ er selvadjungert.

Det reelle spektralteoremet. *La f være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{R}$. De følgende påstandene er ekvivalente.*

(1) f er selvadjungert.

(2) V har en ortonormal basis som består av egenvektorer for f.

(3) Det finnes en ortonormal basis β for V som er slik at $[f]_\beta$ er diagonal.