SAMARBEIDSOPPGAVER S23
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. For hvilke a, b, c er den følgende matrisa normal?

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 2. La β være standardbasisen for $\mathbb{R}^2$ og la $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være slik at

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) For hvilke tall b er f selvadjungert?

(b) Finn et tall b som gjør f normal, men ikke selvadjungert.

Oppgave 3.

(a) Gi et eksempel på ei (2×2)-matrise som er både unitær og selvadjungert, men som ikke består av kun reelle tall.

(b) Hva kan du si om inversen til ei matrise som er både unitær og selvadjungert?

Oppgave 4. La A være ei øvre triangulær matrise. Vis at

$$A \text{ er normal hvis og bare hvis } A \text{ er diagonal.}$$

Andre time

Oppgave 5. La $\mathbb{R}^3$ ha det euklidske indreproduktet. Vis at det ikke finnes noen selvadjungert lineær operator f på $\mathbb{R}^3$ som er slik at

$$f(1,\,2,\,3) = (0,\,0,\,0) \text{ og } f(2,\,5,\,7) = (2,\,5,\,7).$$

Oppgave 6.

(a) La f være en selvadjungert lineær operator. Vis at hver egenverdi for f er et reelt tall.

(b) Gi et eksempel på ei symmetrisk matrise som *ikke* har reelle egenverdier. Hvorfor strider ikke dette mot det du viste i (a)?

Oppgave 7. La $f\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V over $\mathbb{C}$. Vis at

$$f \text{ er selvadjungert} \iff \langle f(\bar{v}), \bar{v}\rangle \in \mathbb{R} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

Oppgave 8. Se på $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med indreproduktet gitt ved

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathsf{d}x.$$

La $f\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ være den lineære operatoren gitt ved

$$f(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1x.$$

(a) Vis at f *ikke* er selvadjungert.

(b) For basisen $\beta = \{1,\, x,\, x^2\}$ for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ har vi

$$[f]_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

og denne matrisa *er* selvadjungert.

Hvorfor er dette ikke i strid med Fint Faktum fra forelesning V22?

Mer, mer, mer!

Oppgave 9. La f være en normal lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom.

Vis at $\mathsf{Im}\, f = \mathsf{Im}\, f^*$.

Oppgave 10. La f være en lineær operator på $\mathbb{C}^3$ med euklidsk indreprodukt. Anta at f er normal og at

$$f(1,\,1,\,1) = (2,\,2,\,2).$$

Vis at hvis $(z_1,\,z_2,\,z_3) \in \mathsf{Ker}\, f$, så er $z_1 + z_2 + z_3 = 0$.

Oppgave 11. La f være en ikke-null lineær operator på et indreproduktrom.

Vis at hvis f er nilpotent, så er f er ikke normal.

Oppgave 12. La f være en normal lineær operator på et indreproduktrom V.

Vis at

$$\mathsf{Ker}(f^n) = \mathsf{Ker}\, f \text{ for hver } n \geq 1.$$

Oppgave 13. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom. Fiksér to vektorer $\bar{u}, \bar{x} \in V$ og la $f \colon V \longrightarrow V$ være gitt ved

$$f(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{u} \rangle \bar{x}.$$

(a) Sjekk at f er en lineær operator.

(b) Vis at

$$f^*(\bar{v}) = \langle \bar{v}, \bar{x} \rangle \bar{u} \text{ for hver } \bar{v} \in V.$$

(c) La $F = \mathbb{R}$. Vis at

$$f \text{ er selvadjungert } \iff \{\bar{u}, \bar{x}\} \text{ er lineært avhengig.}$$

(d) Vis at

$$f \text{ er normal } \iff \{\bar{u}, \bar{x}\} \text{ er lineært avhengig.}$$

Oppgave 14. La $\mathbb{R}^3$ ha det euklidske indreproduktet. Finnes det en lineær operator f på $\mathbb{R}^3$ som er slik at

- f ikke er selvadjungert *og*
- det finnes en basis for $\mathbb{R}^3$ som består av egenvektorer for f?

Grunngjev svaret ditt.

Oppgave 15. La $f \colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom V.

Vis at operatoren $(f^* \circ f - f \circ f^*) \colon V \longrightarrow V$ er selvadjungert.

Oppgave 16. La $f \colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et indreproduktrom V.

Vis at hvis f er normal, så er også $(f - \lambda \cdot f) \colon V \longrightarrow V$ normal for hver $\lambda \in F$.