SAMARBEIDSOPPGAVER S22
MA1202/6202

FØRSTE TIME

Oppgave 1. Er den gitte matrisa ortogonal? I så fall, finn inversen.

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Oppgave 2. Er den gitte matrisa unitær? I så fall, finn inversen.

(a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1+i}{2} & \frac{1+i}{2} \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} \frac{1+i}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{i}{\sqrt{3}} \\ \frac{3+i}{2\sqrt{15}} & \frac{4+3i}{2\sqrt{15}} & \frac{5i}{2\sqrt{15}} \end{pmatrix}$

Oppgave 3.

(a) Vis at inversen til ei ortogonal matrise er ortogonal.

(b) Vis at produktet av to ortogonale matriser er ortogonal.

(c) Vis at hvis A er ortogonal, så er $|\mathsf{det}(A)| = 1$.

(d) Vis at (a), (b) og (c) holder også hvis vi skriver *unitær* i stedet for *ortogonal*.

Oppgave 4. La $\lambda \in \mathbb{C}$ være en egenverdi for ei unitær matrise. Vis at $|\lambda| = 1$.

Oppgave 5. La $f\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreproduktrom. Vis at

$$\lambda \text{ er en egenverdi for } f \iff \overline{\lambda} \text{ er en egenverdi for } f^*.$$

Andre time

Oppgave 6. La $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ ha de respektive euklidske indreproduktene og la $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være lineærtransformasjonen gitt ved

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3) = (x_2 + 3x_3,\, 2x_1)$$

for hver $(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Finn et uttrykk for vektoren

$$f^*(y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^3$$

for hver $(y_1,\, y_2) \in \mathbb{R}^2$, hvor $f^*\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er den adjungerte til f.

(b) Verifiser at f^* er en lineærtransformasjon.

Oppgave 7. La $n \geq 1$, la $\mathbb{R}^n$ ha det euklidske indreproduktet og la $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ være den lineære operatoren gitt ved

$$f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, \ldots,\, x_n) = (0,\, x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{n-1}).$$

Finn et uttrykk for $f^*(y_1,\, y_2,\, y_3,\, \ldots,\, y_n)$.

Oppgave 8. La $f\colon U \longrightarrow V$ og $g\colon V \longrightarrow W$ være lineærtransformasjoner, hvor U, V og W er endeligdimensjonale indreproduktrom. Vis at

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^*.$$

Oppgave 9. La s og t være lineære operatorer på et indreproduktrom.

Vis at hvis s og t er isometrier, så er $t \circ s$ også en isometri.

Oppgave 10. *Bevis eller motbevis* følgende utsagn:

La s være en lineær operator på et indreproduktrom V, og anta at det finnes en ortonormal basis $\bar{e}_1,\, \ldots,\, \bar{e}_n$ for V som er slik at $||\bar{s}(e_i)|| = 1$ for hver $1 \leq i \leq n$. Da er s en isometri.

Mer, mer, mer!

Oppgave 11. La V være et endeligdimensjonalt vektorrom med lineære operatorer f og g. Vis at

$$f \circ g = \mathsf{id}_V \iff g \circ f = \mathsf{id}_V .$$

Oppgave 12. La $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineær operator mellom endeligdimensjonale indreproduktrom med ortonormale basiser $\beta \subset V$ og $\beta' \subset W$. Vis at

$$[f^*]_{\beta'}^{\beta} = \left([f]_{\beta}^{\beta'}\right)^*$$

Oppgave 13. La $f\colon V \longrightarrow V$ være en lineær operator på et endeligdimensjonalt indreprodukt V over $\mathbb{R}$ (eller $\mathbb{C}$). Vis at de følgende utsagnene er ekvivalente:

(i) Operatoren f er ortogonal (eller unitær).

(ii) Det finnes en ortonormal basis β for V slik at matrisa $[f]_\beta$ er ortogonal (eller unitær).

(iii) Matrisa $[f]_\beta$ er ortogonal (eller unitær) for enhver ortonormal basis β for V.

Fundamentale egenskaper

Oppgave 14. Vis at den adjungerte er lineær.

Det vil si, la $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon mellom indreproduktrom og anta at det eksisterer en funksjon $f^*\colon W \longrightarrow V$ som er slik at

$$\langle f(\bar{v}), \bar{w}\rangle = \langle \bar{v}, f^*(\bar{w})\rangle \text{ for hver } \bar{v} \in V \text{ og } \bar{w} \in W.$$

Vis at f^* er en lineærtransformasjon.

Oppgave 15. La V være et indreproduktrom. Vis at

$$(\mathsf{id}_V)^* = \mathsf{id}_V .$$

Oppgave 16. La $f, g\colon V \longrightarrow W$ være lineærtransformasjoner, hvor V og W er endeligdimensjonale indreproduktrom. Vis at

(a) $(f+g)^* = f^* + g^*$;

(b) $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$ for hver $\lambda \in F$; og

(c) $(f^*)^* = f$.

Oppgave 17. La $f\colon V \longrightarrow W$ være en lineærtransformasjon, hvor V og W er endeligdimensjonale indreproduktrom. Vis at

(a) $\mathsf{Ker}\, f^* = (\mathsf{Im}\, f)^\perp$;

(b) $\mathsf{Im}\, f^* = (\mathsf{Ker}\, f)^\perp$;

(c) $\mathsf{Ker}\, f = (\mathsf{Im}\, f^*)^\perp$; og

(d) $\mathsf{Im}\, f = (\mathsf{Ker}\, f^*)^\perp$.