SAMARBEIDSOPPGAVER S21
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. I denne oppgaven ser vi på funksjonen $f\colon [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x + 1.$$

(a) Finn den lineærkombinasjonen

$$g(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + c_3 \sin x + c_4 \sin 2x \tag{$*$}$$

som gir den beste tilnærminga til f, i den forstand at

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - g(x)|^2 \mathsf{d}x$$

blir så lite som mulig.

(b) La $n \geq 2$. Finn den lineærkombinasjonen

$$h(x) = d_0 + d_1 \cos x + \cdots + d_n \cos nx + d_{n+1} \sin x + \cdots + d_{2n+1} \sin nx$$

som gir den beste tilnærminga til f, i den forstand at

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - h(x)|^2 \mathsf{d}x$$

blir så lite som mulig.

Hint: I denne oppgaven kan du bruke formlene for Fourier-koeffisientene til f fra forelesning V21 (selv om vi skal vise dem først i Oppgave 4 nedenfor).

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på funksjonen $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = x.$$

(a) Finn de tallene $a, b \in \mathbb{R}$ som er slik at funksjonen

$$\phi(x) = a + be^x$$

blir den beste tilnærminga til f, i den forstand at avviket

$$\int_0^1 |f(x) - \phi(x)|^2 \mathsf{d}x$$

blir så lite som mulig.

(b) Hvor stort er avviket i (a)?

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på funksjonen $f\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$f(x) = \sin \pi x.$$

(a) Finn den beste tilnærminga til f på formen

$$p(x) = a + bx + cx^2.$$

Det vil si, bestem $a, b, c \in \mathbb{R}$ slik at avviket

$$\int_{-1}^{1} |f(x) - p(x)|^2 \mathrm{d}x$$

blir så lite som mulig.

(b) Hvor stort er avviket i (a)?

Mer, mer, mer!

Oppgave 4. La V være det reelle indreproduktrommet av alle kontinuerlige funksjoner med

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_0^{2\pi} \phi(x)\psi(x)\mathsf{d}x \text{ for alle } \phi, \psi \in V.$$

La n være et naturlig tall og se på delmengden

$$\beta = \{1, \cos x, \ldots, \cos nx, \sin x, \ldots, \sin nx\} \subset V.$$

(a) Finn en ortonormal basis for underrommet $\mathsf{span}(\beta) \subset V$ ved å bruke Gram–Schmidt-prosessen på β. *(Fasiten finnes i forelesning V21.)*

(b) Vis at for hver $f \in V$ er

$$P_U(f) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx + a_1 \sin x + \cdots + b_n \sin nx$$

med

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)$$

og

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \;\text{ og }\; b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \text{ for } 1 \le k \le n$$