SAMARBEIDSOPPGAVER S20
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Vi ser på $\mathbb{R}^3$ med det euklidske indreproduktet, vektoren $\bar{v} = (1,\ 1,\ 1)$ og underrommet

$$U = \mathsf{span}\left((0,\ 1,\ 0),\ \left(-\frac{4}{5},\ 0,\ \frac{3}{5}\right)\right) \subset \mathbb{R}^3.$$

(a) Finn den ortogonale projeksjonen $P_U(\bar{v}) \in U$.

(b) Sjekk at vektoren $\bar{v} - P_U(\bar{v})$ står vinkelrett på planet U.

Oppgave 2. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

> **Oppgave 2.** I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La
>
> $$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \bar{v}_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$
>
> (a) Hva er dimensjonen til underrommet V? Finn en ortonormal basis for V.
>
> (b) Nå lar vi
>
> $$\bar{w} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}.$$
>
> Finn en vektor $\bar{v} \in V$ som er slik at tallet $||\bar{w} - \bar{v}||$ er så lite som mulig.

Oppgave 3. Vi ser på $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet og underrommet

$$U = \mathsf{span}\left((1,\ 1,\ 0,\ 0),\ (1,\ 1,\ 1,\ 2)\right).$$

Finn den vektoren $\bar{u} \in U$ som gjør at tallet $||\bar{u} - (1, 2, 3, 4)||$ blir så lite som mulig.

Oppgave 4. Finn det polynomet $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ med $p(0) = 0 = p'(0)$ som gjør tallet

$$\int_0^1 |2 + 3x - p(x)|^2 dx$$

så lite som mulig.

Andre time

Oppgave 5. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la $U \subset V$ være et underrom. Vis at

$$P_{U^\perp} = \mathsf{id}_V - P_U.$$

Oppgave 6. La f være en lineær operator på et indreproduktrom V og la $U \subset V$ være et endeligdimensjonalt underrom.

Vis at

$$U \text{ er invariant under } f \iff P_U \circ f \circ P_U = f \circ P_U.$$

Oppgave 7. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la P være en lineær operator på V. Anta at $P^2 = P$ og at hver vektor i $\mathsf{Ker}\, P$ er ortogonal med hver vektor i $\mathsf{Im}\, P$.

Vis at P er en ortogonal projeksjon, altså at det finnes et underrom $U \subset V$ slik at $P = P_U$.

Oppgave 8. La U være et endeligdimensjonalt underrom av et indreproduktrom. Vis at

$$U = (U^\perp)^\perp.$$

Fundamentale egenskaper

Oppgave 9. La U være en delmengde i et indreproduktrom V.

Vis at

(a) $U^\perp = (\mathsf{span}(U))^\perp$ er et underrom av V;

(b) $U \cap U^\perp = \{\bar{0}\}$;

(c) Hvis W er en delmengde med $U \subset W$, så blir $W^\perp \subset U^\perp$;

(d) $\{\bar{0}\}^\perp = V$;

(e) $V^\perp = \{\bar{0}\}$.

Oppgave 10. La U være et endeligdimensjonalt underrom av et indreproduktrom V og la $P_U \colon V \longrightarrow V$ være den ortogonale projeksjonen av V på U.

Vis at

(a) P_U er en lineær operator på V;

(b) $P_U(\bar{u}) = \bar{u}$ for hver $\bar{u} \in U$;

(c) $P_U(\bar{w}) = \bar{0}$ for hver $\bar{w} \in U^\perp$;

(d) $\mathsf{Im}\, P_U = U$;

(e) $\mathsf{Ker}\, P_U = U^\perp$;

(f) $\bar{v} - P_U(\bar{v}) \in U^\perp$ for hver $\bar{v} \in V$;

(g) $(P_U)^2 = P_U$;

(h) $||P_U(\bar{v})|| \leq ||\bar{v}||$ for hver $\bar{v} \in V$.

Oppgave 11. La V være et endeligdimensjonalt indreproduktrom og la $U \subset V$ være et underrom. Vis at

$$\mathsf{dim}\, V = \mathsf{dim}\, U + \mathsf{dim}\, U^\perp.$$

Mer, mer, mer!

Oppgave 12. Finn det polynomet $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 5}$ som gjør tallet

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\,\mathsf{sin}\, x - p(x)|^2 dx$$

så lite som mulig. Sammenlign polynomet ditt med Taylor-polynomet til $\mathsf{sin}\, x$ av grad 5.

Merk: I denne oppgaven kan det lønne seg å få hjelp av en datamaskin!