SAMARBEIDSOPPGAVER S19
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Funksjonen $\phi\colon \mathbb{C}^4 \longrightarrow \mathbb{C}$ gitt ved

$$\phi(z_1,\, z_2,\, z_3,\, z_4) = z_1 - iz_3 + 2z_4$$

er en lineær funksjonal. La $\mathbb{C}^4$ ha det euklidske indreproduktet. Finn en vektor $\bar{v} \in \mathbb{C}^4$ som er slik at

$$\phi = \langle -, \bar{v} \rangle.$$

Oppgave 2. I denne oppgaven har $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ indreproduktet gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathsf{d}x \ \text{ for alle } p, q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}.$$

(a) Finn en ortonormal basis for dette indreproduktrommet ved å bruke Gram–Schmidt-prosessen på basisen $\{1,\ x,\ x^2\}$.

Fasit:

$$\left\{1,\ \sqrt{3}(-1+2x),\ \sqrt{5}(1-6x+6x^2)\right\}.$$

(b) Sjekk at funksjonen $\phi\colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$\phi(a + bx + cx^2) = a + \frac{2b}{3} + \frac{c}{2}$$

er en lineær funksjonal.

(c) Finn en $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som er slik at $\phi = \langle -, p \rangle$.

Oppgave 3. Finn et polynom $q \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ som er slik at

$$p\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^1 p(x)q(x)\mathsf{d}x$$

for hver $p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

Hint: I Oppgave 2 fant du en ortonormal basis som kan være nyttig her.

Andre time

Oppgave 4. La $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ være lineært uavhengig i et reelt indreproduktrom V.

Vis at det finnes en $\bar{w} \in V$ som er slik at

$$\langle \bar{v}_i, \bar{w} \rangle > 0 \text{ for hver } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Oppgave 5. La V være et reelt indreproduktrom og la $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\} \subset V$ være lineært uavhengig.

Vis at det finnes nøyaktig 2^n ortonormale mengder $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ i V som er slik at

$$\mathsf{span}\,(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_i) = \mathsf{span}\,(\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_i) \text{ for hver } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Oppgave 6. La V være det reelle vektorrommet av alle kontinuerlige funksjoner fra intervallet $[-1, 1]$ til $\mathbb{R}$. Husk at V har et indreproduktet gitt ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathsf{d}x.$$

(a) Vis at funksjonen $\phi \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$\phi(f) = f(0) \text{ for hver } f \in V$$

er en lineær funksjonal.

(b) Vis at det *ikke* finnes noen $g \in V$ som er slik at $\phi(f) = \langle f, g \rangle$ for hver $f \in V$. Hvorfor er ikke dette i strid med teoremet fra forelesning V19?