SAMARBEIDSOPPGAVER S18
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. La vektorrommet $\mathbb{C}^3$ ha det euklidske indreproduktet og se på basisen

$$\beta = \{(i,\, i,\, i),\ (0,\, i,\, i),\ (0,\, 0,\, i)\}\,.$$

Finn on ortogonal basis for dette indreproduktrommet ved å bruke Gram–Schmidt-prosessen på β.

Oppgave 2. I forelesning V18 fant vi at

$$\beta = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}x,\ \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) \right\}$$

er en ortonormal basis for $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ med indreproduktet

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathsf{d}x.$$

Skriv hvert av de følgende polynomene som en lineærkombinasjon av vektorene i β.

(a) $1 + x + 4x^2$;

(b) $2 - 7x^2$;

(c) $4 + 3x$.

Oppgave 3. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på det reelle vektorrommet $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet. La

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \bar{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix},\ \bar{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\1\end{pmatrix} \text{ og } V = \mathsf{span}\,\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} \subset \mathbb{R}^4.$$

(a) Finn en ortonormal basis for V.

(b) Vektoren

$$\bar{v} = \begin{pmatrix}-5\\1\\4\\4\end{pmatrix}$$

ligger i underrommet V. Skriv $\bar{v}$ som en lineærkombinasjon av vektorene i den ortonormale basisen du fant i (a).

Andre time

Oppgave 4. La θ være et reelt tall og se på de to delmengdene

$$\beta_1 = \{(\cos\theta,\ \sin\theta)\,,\ (-\sin\theta,\ \cos\theta)\} \text{ og } \beta_2 = \{(\cos\theta,\ \sin\theta),\ (\sin\theta,\ -\cos\theta)\}$$

i indreproduktrommet $\mathbb{R}^2$ (med euklidsk indreprodukt).

(a) Vis at både β_1 og β_2 er ortonormale basiser for $\mathbb{R}^2$.

(b) Vis at *enhver* ortonormal basis for $\mathbb{R}^2$ er på formen β_1 eller β_2.

Oppgave 5. Hva skjer hvis vi bruker Gram–Schmidt-prosessen på en lineært avhengig mengde? Undersøk først hva som skjer i et konkret tilfelle, e.g. delmengden

$$\{(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ 1,\ 1),\ (1,\ 2,\ 1)\} \text{ i } \mathbb{R}^3.$$

Fundamentale egenskaper

Husk: Nå er $F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$. Hvis $z = a + bi$, så skriver vi $\overline{z} = a - bi$.

Oppgave 6. La V være et indreproduktrom over F. For $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ og $c \in F$, vis at

(a) $\langle \bar{0}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{v}, \bar{0} \rangle = 0$;

(b) $\langle \bar{u}, \bar{v} + \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle + \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle$;

(c) $\langle \bar{u}, c\bar{v} \rangle = \overline{c}\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$.

Oppgave 7. La V være et indreproduktrom over F. For $\bar{v} \in V$ og $c \in F$, vis at

(a) $||\bar{v}|| = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$;

(b) $||c\bar{v}|| = |c|||\bar{v}||$.

Oppgave 8. La V være et indreproduktrom over F. Vis at

(a) $\bar{0}$ er ortogonal med hver vektor i V;

(b) $\bar{0}$ er den eneste vektoren i V som er ortogonal med seg selv.

Mer, mer, mer!

Oppgave 9.

(a) Vis at funksjonen $\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$\langle p, q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

er et indreprodukt.

(b) Er funksjonen $\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ gitt ved

$$\langle p, q \rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

et indreprodukt?

(c) For hvilke naturlige tall n og k er funksjonen

$$\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}[x]_{\leq n} \times \mathbb{R}[x]_{\leq n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \sum_{i=0}^{k} p(i)q(i)$$

et indreprodukt?

Oppgave 10.

(a) Vis at funksjonen

$$\langle -,- \rangle \colon \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \times \mathbb{R}[x]_{\leq 2} \longrightarrow \mathbb{R}$$

gitt ved

$$\langle a_0 + a_1 x + a_2 x^2,\ b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \rangle = a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2$$

er et indreprodukt på $\mathbb{R}[x]_{\leq 2}$.

(b) På hvilken måte ”stammer” indreproduktet i (a) fra $\mathbb{R}^3$?

(c) Overbevis en venn om at

- ethvert endeligdimensjonalt $\mathbb{R}$-vektorrom har et indreprodukt og at
- ethvert endeligdimensjonalt $\mathbb{C}$-vektorrom har et indreprodukt.

(d) Vis at ethvert vektorrom over $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ har et indreprodukt *(forutsetter at du har sett ”Eksistens av basis” (bonusmateriell))*.