SAMARBEIDSOPPGAVER S17
MA1202/6202

Husk: Nå er $F = \mathbb{R}$ eller $F = \mathbb{C}$. Hvis $z = a + bi$, så skriver vi $\overline{z} = a - bi$.

Første time

Oppgave 1. La det komplekse vektorrommet $\mathbb{C}^2$ ha det euklidske indreproduktet.

(a) Hva er normen til vektoren $\bar{v} = (1, i) \in \mathbb{C}^2$?

(b) Finn en ikke-null vektor i $\mathbb{C}^2$ som er ortogonal med $\bar{v}$.

Oppgave 2. I denne oppgaven jobber vi i $\mathbb{R}^3$ med vektorene

$$\bar{u} = (2,\ 4,\ -1) \text{ og } \bar{v} = (1,\ 1,\ 1).$$

(a) La $\mathbb{R}^3$ ha det euklidske indreproduktet. Finn $c \in \mathbb{R}$ og $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ slik at

$$\bar{u} = c\bar{v} + \bar{w} \text{ og } \bar{w} \text{ er ortogonal med } \bar{v}.$$

(b) La nå $\mathbb{R}^3$ ha det vekta euklidske indreproduktet gitt ved

$$\langle (x_1,\ x_2,\ x_3),\ (y_1,\ y_2,\ y_3) \rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

Finn $c \in \mathbb{R}$ og $\bar{w} \in \mathbb{R}^3$ slik at

$$\bar{u} = c\bar{v} + \bar{w} \text{ og } \bar{w} \text{ er ortogonal med } \bar{v}.$$

Oppgave 3. Husk at et *indreprodukt* på et F-vektorrom V er en funksjon

$$\langle -, - \rangle \colon V \times V \longrightarrow F$$

som tilfredsstiller følgende aksiomer for $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$ og $c \in F$.

i) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \in \mathbb{R}$ og $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle \geq 0$;

ii) $\langle \bar{v}, \bar{v} \rangle = 0 \iff \bar{v} = \bar{0}$;

iii) $\langle \bar{u} + \bar{v}, \bar{w} \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w} \rangle + \langle \bar{v}, \bar{w} \rangle$;

iv) $\langle c\bar{u}, \bar{v} \rangle = c\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$;

v) $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \overline{\langle \bar{v}, \bar{u} \rangle}$.

I hvert av de følgende tilfellene, er den gitte funksjonen $\langle -, - \rangle \colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ et indreprodukt på det reelle vektorrommet V?

(a) $V = \mathbb{R}^3$ og $\langle -, - \rangle$ gitt ved

$$\langle (x_1,\ x_2,\ x_3),\ (y_1,\ y_2,\ y_3) \rangle = x_1y_1 + x_3y_3;$$

(b) $V = \mathbb{R}^2$ og $\langle -, - \rangle$ gitt ved

$$\langle (x_1,\ x_2),\ (y_1,\ y_2) \rangle = |x_1y_1| + |x_2y_2|;$$

(c) $V = \mathbb{R}[x]$ og $\langle -, - \rangle$ gitt ved

$$\langle p, q \rangle = \int_0^\infty p(x)q(x)e^{-x}\mathsf{d}x.$$

Andre time

Oppgave 4. La V være et indreproduktrom med $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

(a) Vis *Cauchy–Schwartz-ulikheten*, som sier at
$$|\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle| \leq ||\bar{u}|| \cdot ||\bar{v}||.$$

(b) Vis *trekantulikheten*, som sier at
$$||\bar{u} + \bar{v}|| \leq ||\bar{u}|| + ||\bar{v}||.$$

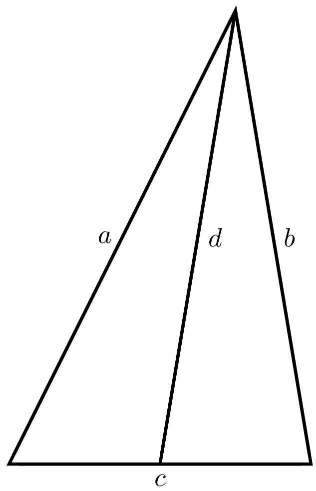
Oppgave 5. La a, b, c, d være positive tall. Vis at
$$16 \leq (a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right).$$
Hint: Bruk Cauchy–Schwartz-ulikheten i $\mathbb{R}^4$ med det euklidske indreproduktet.

Oppgave 6. La V være et indreproduktrom med $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} \in V$.

(a) Vis at *parallellogramloven* holder i V, det vil si at
$$||\bar{u} + \bar{v}||^2 + ||\bar{u} - \bar{v}||^2 = 2 \left(||\bar{u}||^2 + ||\bar{v}||^2 \right).$$
(Hva er forklaringa på navnet her?)

(b) Vis at
$$\left|\left| \bar{w} - \frac{1}{2}(\bar{u} + \bar{v}) \right|\right|^2 = \frac{||\bar{w} - \bar{u}||^2 + ||\bar{w} - \bar{v}||^2}{2} - \frac{||\bar{u} - \bar{v}||^2}{4}.$$

Oppgave 7. I en trekant med sider av lengde a, b og c, la d være lengden av linjestykket fra midtpunktet av siden med lengde c til det motsatte hjørnet. Vis at
$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2d^2.$$



Hint: Her kan du bruke Oppgave 6(b).

Mer, mer, mer!

Oppgave 8. La V være et indreproduktrom med $\bar{u}, \bar{v} \in V$.

(a) Vis at hvis $F = \mathbb{R}$, så er
$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{||\bar{u}+\bar{v}||^2 - ||\bar{u}-\bar{v}||^2}{4}.$$

(b) Vis at hvis $F = \mathbb{C}$, så er
$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \frac{||\bar{u}+\bar{v}||^2 - ||\bar{u}-\bar{v}||^2 + ||\bar{u}+i\bar{v}||^2 i - ||\bar{u}-i\bar{v}||^2 i}{4}.$$

Oppgave 9. I denne oppgaven er $\langle -, - \rangle_I$ det euklidske indreproduktet på F^n.

Husk at hvis A er ei matrise, så er A^* den transponert-konjugerte til A, altså matrisa vi får ved å transponere A og komplekskonjugere i hver posisjon. (Det betyr spesielt at hvis A består av reelle tall, så er $A^* = A^T$.) Observer at hvis vi skriver vektorene i F^n som kolonnevektorer, altså
$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ og } \bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$
så blir det euklidske indreproduktet et matriseprodukt, nemlig
$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_I = \overline{y_1}x_1 + \overline{y_2}x_2 + \cdots + \overline{y_n}x_n = \bar{y}^* \cdot \bar{x}.$$

La A være ei inverterbar $(n \times n)$-matrise over F.

(a) Vis at funksjonen
$$\langle -, - \rangle_A \colon F^n \times F^n \longrightarrow F$$
gitt ved
$$\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle_A = \langle A\bar{x}, A\bar{y} \rangle_I$$
er et indreprodukt på F^n.

Anta at $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ alle er ekte positive.

(b) Vis at det vekta euklidske indreproduktet på $\mathbb{R}^n$ med $a_1, a_2, \ldots, a_n$ som vekter, er på formen $\langle -, - \rangle_A$ for ei inverterbar matrise A.

La f være en lineær operator på et F-vektorrom V med et indreprodukt $\langle -, - \rangle$. Definér en ny funksjon
$$\langle -, - \rangle_f \colon V \times V \longrightarrow F$$
ved regelen
$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_f = \langle f(\bar{u}), f(\bar{v}) \rangle \text{ for alle } \bar{u}, \bar{v} \in V.$$

c) Vis at $\langle -, - \rangle_f$ er et indreprodukt på V hvis og bare hvis f er injektiv.