SAMARBEIDSOPPGAVER S16
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Løs følgende oppgave fra eksamen i mai 2023.

> **Oppgave 1.** I en liten by selger Solveig og Tuva lemonade fra hver sin kiosk. Det viser seg at 60% av kundene som sist gikk til Solveig også går til Solveig neste gang, mens 40% av dem går til Tuva neste gang. Av de som sist gikk til Tuva, går 30% til Solveig for sin neste lemonade, mens 70% går til Tuva igjen.
>
> Hvor mange prosent av innbyggerne går til Tuva sin lemonadekiosk på lang sikt?

Oppgave 2. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2017.

> **Oppgave 3** En liten by har to restauranter, A og B. Til enhver tid vil 75% av gjestene som sist spiste på A også spise der neste gang de spiser ute, mens 25% av dem spiser på B neste gang. Av gjestene som sist spiste på B, spiser 50% på A neste gang, mens 50% spiser på B igjen.
>
> Hvor mange prosent av gjestene spiser på restaurant A på lang sikt?

Oppgave 3. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2015.

> **Oppgåve 5** Tom er i ein av følgjande to tilstander: Glad eller trist. Ein har observert at hvis Tom er glad ein dag er sannsynet for at han er glad neste dag $\frac{4}{5}$, men hvis han er trist ein dag er sannsynet for at han er trist neste dag $\frac{1}{3}$.
>
> **a)** Kva blir overgangsmatrisa («transition matrix») for denne Markov-prosessen?
>
> **b)** Finn likevektsvektoren («the steady state vector»)) for denne prosessen.
>
> **c)** Forklar tydinga av denne vektoren. Kva er sannsynet *i det lange løp* for at Tom er glad på ein gjeven dag?

Oppgave 4. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2016.

> **Oppgave 4**
>
> En maurkoloni har fordelt seg på to tuer, A og B. Til enhver tid vil 90 % av maurene som sist overnattet i tue A også overnatte der neste natt, mens 10 % av dem tilbringer neste natt i tue B. Av maurene som sist overnattet i tue B, flytter 50 % over til tue A neste natt, mens 50 % blir værende i tue B.
>
> Hvor mange prosent av maurene er det i hver av de to tuene etter mange netter?

Andre time

Oppgave 5. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2011.

Oppgave 6 Finn den stabile tilstandsvektoren til en Markovkjede med overgangsmatrise

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 2/3 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Oppgave 6. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2006.

Oppgave 2 Matrisen M gitt ved

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4/5 & 1/5 \\ 0 & 1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

har to distinkte egenverdier.

a) Finn egenverdiene og en basis for de to egenrommene E_1 og E_2 til M.

b) Finn en matrise P som diagonaliserer M og den tilhørende diagonalmatrisen D, slik at $P^{-1}MP = D$.

c) En kantine serverer kjøtt-, fiske- og vegetar-måltider til 100 faste middagsgjester. Kokken er en noe spesiell hobbymatematiker og ønsker å forutsi hvordan middagsgjestene fordeler seg på de ulike rettene. Kokken har observert følgende: De som spiser vegetar spiser vegetar neste dag. Av de som spiser kjøtt spiser 80% kjøtt neste dag og 20% fisk neste dag. Av de som spiser fisk spiser 80% fisk neste dag og 20% kjøtt neste dag. Hvis det en gitt dag er 10 personer som spiser vegetar, 80 som spiser kjøtt og 10 som spiser fisk, hvordan fordeler disse seg da etter 5 dager?

Oppgave 7. Vis at tallet 1 er en egenverdi for enhver stokastisk matrise.

Mer, mer, mer!

Oppgave 8. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2020.

Oppgave 3 Matrisen

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0.1 & 1 \end{pmatrix}$$

er overgangsmatrisen til et system.

a) Finn egenverdiene og egenvektorene til M.
Hvilke av egenvektorene er sannsynlighetsvektorer?

Gitt $p_0 = (0.5, 0.3, 0.2)$ kan vi definere en følge av vektorer $p_0, p_1, p_2, \ldots$ som $p_i = Mp_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$.

b) Finn grensen $\lim_{i\to\infty} p_i$.
Er svaret uavhengig av verdien som ble oppgitt for p_0?

Oppgave 9. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2019.

Oppgave 4 La

$$M = \begin{pmatrix} 0.8 & 0 & 0.25 \\ 0.05 & 0.85 & 0.05 \\ 0.15 & 0.15 & 0.7 \end{pmatrix}.$$

a) Vis at $\lambda = 1$ er en egenverdi til matrisen. Finn en basis for egenrommet til $\lambda = 1$. Hva er $\lim_{n\to\infty} M^n$?

Datasystemer inneholder feil. Mange av disse feilene gjør ondsinnede angrep mot systemet mulig, dersom skurker får kunnskap om feilene.

Vi antar at det er tre muligheter for hvem som har kunnskap om disse feilene:

1. Ingen vet om noen feil. (Systemet er *trygt.*)
2. Skurker vet om en eller flere feil. (Systemet er *ekstremt sårbart.*)
3. Alle vet om en eller flere feil. (Systemet er *beskyttbart.*)

Hvis ingen vet om noen feil i én uke er det 5 % sannsynlighet for at skurkene finner en feil til neste uke. Det er 15 % sannsynlighet for at noen til neste uke finner en feil og offentliggjør den, uten at den blir rettet.

Når bare skurkene vet om feil i én uke er det 15 % sannsynlighet for at minst én feil blir alment kjent til uken etter.

Når en feil er alment kjent i én uke er det 25 % sannsynlighet for at alle kjente feil er rettet til uken etter (systemet er trygt). Det er 5 % sannsynlighet for at de alment kjente feilene er rettet, men at skurkene kjenner flere feil uken etter.

For et stort system er det rimelig å anta at det er så mange feil at det overstående holder i et lenger tidsrom, og vi kan dermed modellere dette som en Markovkjede.

b) Anta at systemet har vært lenge i drift. Gi et begrunnet anslag på hvor mange uker i gjennomsnitt du forventer at systemet er trygt i løpet av et år.

Oppgave 10. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2013.

Oppgave 4 La M være en 2×2 Markovmatrise som er symmetrisk og la $|q| < 1$ være en reell egenverdi for M.

a) Vis at M kan uttrykkes som

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1+q & 1-q \\ 1-q & 1+q \end{bmatrix}$$

og finn basiser for egenrommene til M i $\mathbb{R}^2$.

b) Anta at fra ett år til neste, vil 99% av ikke-røykere fortsatt være ikke-røykere, og at 99% av røykere fortsatt være røykere. Dersom denne tendensen er konstant hva kan du si om andelen røykere og ikke-røykere i det lange løp?

Oppgave 11. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2008.

Oppgave 3 En flue har rotet seg inn i et kryss og surrer forvirret rundt mellom 5 ulike områder (se figur).

	1	
2	3	4
	5	

Vi antar at flua flyr fra et område til et annet hvert sekund. Hvis flua befinner seg i midten (område 3) vil den velge blindt mellom hvert av de fire andre områdene og dra dit (sannsynligheten er altså $1/4$ til hvert av de fire områdene). Hvis den derimot står i område $1, 2, 4$ eller 5, vil den dra inn til midten med sannsynlighet 1.

a) Skriv opp Markov-matrisa M som beskriver denne prosessen.

Det oppgis at $1, -1, 0$ er egenverdiene til M.

b) Bestem nulliteten (nullity) til M, begrunn hvorfor M er diagonaliserbar og vis at $M^3 = M$.

c) La oss se på en situasjon der en stor populasjon av fluer slippes inn til område 3 på et tidspunkt $t = 0$. Hver flue forflytter seg mellom de fem områdene som beskrevet over. Hva blir fordelingen av fluer på de fem områdene etter 1001 sekunder ($t = 1001$)?

Oppgave 12. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2005.

Oppgave 5
I desember 2005, på en lekebutikk i Trondheim brukes det papir av to forskjellige farger for innpakning av julegaver, rødt eller blått.

Det viser seg at hvis siste gave er blitt pakket i rødt papir er det 60% sannsynlighet for at blått papir blir brukt til neste pakke og 40% sannsynlighet at rødt papir blir brukt. Hvis siste gave er blitt pakket i blått papir er det 45% sannsynlighet for at blått papir blir brukt til neste pakke og 55% sannsynlighet at rødt papir blir brukt.

Med hvilken sannsynlighet blir rødt og blått papir brukt i det lange løp?