SAMARBEIDSOPPGAVER S15
MA1202/6202

Første time

Oppgave 1. Løs Oppgave 1 fra eksamen i august 2023:

> **Oppgave 1.** I denne oppgaven ser vi på matrisa
>
> $$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$
>
> (a) Finn ei inverterbar matrise P som er slik at $P^{-1}AP$ er diagonal.
>
> (b) Finn en generell løsning av følgende system av differensialligninger.
>
> $$\begin{array}{rcrcr} y_1'(t) & = & 2y_1(t) & - & y_2(t) \\ y_2'(t) & = & -y_1(t) & + & 2y_2(2) \end{array}$$

Oppgave 2. I denne oppgaven ser vi på følgende system av differensialligninger.

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & y_1 & + & 4y_2 \\ y_2' & = & 2y_1 & + & 3y_2 \end{array}$$

(a) Finn en generell løsning av ligningssystemet.

(b) Finn den løsningen som tilfredsstiller $y_1(0) = 0$ og $y_2(0) = 0$.

Oppgave 3. I denne oppgaven ser vi på følgende system av differensialligninger.

$$\begin{array}{rcrcrcr} y_1' & = & 4y_1 & & & + & y_3 \\ y_2' & = & -2y_1 & + & y_2 & & \\ y_3' & = & -2y_1 & & & + & y_3 \end{array}$$

(a) Finn en generell løsning av ligningssystemet.

(b) Finn den løsningen som tilfredsstiller $y_1(0) = -1$, $y_2(0) = 1$ og $y_3(0) = 0$.

Oppgave 4. La A og B være similære matriser.

Vis at hvis A er diagonaliserbar, så er B diagonaliserbar.

Oppgave 5. La

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Finn egenverdiene til A.

(b) For hver egenverdi, finn det tilhørende egenrommet.

(c) Diagonaliser matrisa A.

(d) Diagonaliser matrisa $A^3 - 5A^2 + 3A + I_{2\times 2}$.

(e) Finn et pent uttrykk for matrisa A^{100}

(f) Finn et pent uttrykk for matrisa $(A^3 - 5A^2 + 3A + I_{2\times 2})^{100}$

Oppgave 6. La

$$M_1,\, M_2,\, M_3,\, \ldots,\, M_i,\, \ldots$$

være en følge av reelle (eller komplekse) matriser av samme størrelse.

(a) Hva bør uttrykket $\lim_{i\to\infty} M_i = M$ bety?

La nå A være ei 3×3-matrise over $\mathbb{R}$ som er slik at

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(b) Finn kolonnevektoren

$$\lim_{i\to\infty} A^i \bar{x}$$

hvor $\bar{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Mer, mer, mer!

Oppgave 7. Her skal vi løse differensialligninga

$$(*) \qquad y'' - y' - 6y = 0.$$

(a) Sjekk at hvis vi lar $y_1 = y$ og $y_2 = y'$, så får vi følgende system.

$$\begin{array}{rcrcr} y_1' & = & & & y_2 \\ y_2' & = & 6y_1 & + & y_2 \end{array}$$

(b) Løs $(*)$ via systemet du kom fram til i deloppgave (a).

Oppgave 8. Kan Oppgave 7 gi inspirasjon til å løse følgende ligning?

$$(**) \qquad y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

(a) Finn substitusjoner som gjør $(**)$ til et homogent og lineært system.

(b) Løs $(**)$ via systemet du kom fram til i deloppgave (a).

Oppgave 9. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2007.

Oppgave 4

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -5 & -2 & 3 \\ -5 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Finn egenverdiene og basis for de tilhørende egenrommene til matrisen A.

b) Finn en matrise P som diagonaliserer A og den tilhørende diagonalmatrisen D slik at $P^{-1}AP = D$. Regn ut A^{97} og A^{136}.

Side 3 av 3

c) Anta at vi har følgende system av reelle funksjoner:

$$\begin{array}{rcrcrcl} -2f(x) & - & 5g(x) & + & 3h(x) & = & f'(x) \\ & - & g(x) & & & = & g'(x) \\ -f(x) & - & 5g(x) & + & 2h(x) & = & h'(x) \end{array}$$

Bruk diagonaliseringen over til å bestemme funksjonene $f(x), g(x)$ og $h(x)$ når $f(0) = 1, g(0) = -1$ og $h(0) = 2$.

Oppgave 10. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2010.

Oppgave 5 Se på matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Finn egenverdiene til A.

b) Diagonaliser A, dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

c) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3f(x) + g(x) \\ g'(x) &= f(x) + g(x) - h(x) \\ h'(x) &= 2f(x) - 8g(x) + h(x) \end{aligned}$$

Oppgave 11. Løs følgende oppgave fra eksamen i 2011.

Oppgave 4

a) Diagonaliser matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & \pi & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dvs. finn en inverterbar matrise P og en diagonalmatrise D slik at $A = PDP^{-1}$.

b) Løs differensialligningssystemet

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5f(x) - 3h(x) \\ g'(x) &= f(x) + \pi g(x) \\ h'(x) &= f(x) + h(x) \end{aligned}$$